J. of Nucl Sci. and Tech.
75, 2016, 62-71

مجله‌ی علوم و فنون هسته‌ای
۷۵، ۱۳۹۵، ۷۱-۶۲

تعیین نیمه‌تحلیلی پارامتر تعادلی شفرانف در پلاسمای توکامک دماوند

احسان‌اله نوری*[۱]، یحیی صادقی[۱]، حسن مهدیان[۲]

۱. پژوهشکده‌ی فیزیک پلاسما و گداخت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی، صندوق پستی: ۵۱۱۳-۱۴۳۹۹، تهران ـ ایران
۲. دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه خوارزمی، صندوق پستی: ۱۵۶۱۴، تهران - ایران

چکیده: استفاده از معادله‌ی گراد- شفرانف در بررسی شرایط تعادل پلاسمای محصورسازی مغناطیسی کاربرد فراوانی دارد. در توکامک‌هایی که در رژیم گرمایشی اُهمی قرار دارند، می‌توان معادله‌ی گراد- شفرانف را برحسب پارامتر عکس نسبت تصویر بسط داد و مرتبه‌ی اول تابع شار قطبی را به دست آورد. سپس مرتبه‌ی اول مؤلفه‌های قطبی و شعاعی میدان مغناطیسی قطبی نیز به دست می‌آیند. با استفاده از میدان مغناطیسی قطبی، امکان محاسبه‌ی پارامتر تعادلی شفرانف به صورت نیمه تحلیلی وجود دارد. در این پژوهش، مرتبه‌ی اول میدان مغناطیسی قطبی تعیین و با توجه به داده‌های تجربیِ شماری از پروب‌های مغناطیسی قطبی تعبیه شده در توکامک دماوند، پارامتر تعادلی شفرانف محاسبه شده است.

کلیدواژه‌ها: تعادل پلاسما، معادله‌ی گراد- شفرانف، توکامک دماوند

Semi-Analytic Determination of Shafranov Equilibrium Parameter in Damavand Tokamak Plasma

E. Noori*[1], Y. Sadeghi[1], H. Mehdian[2]

1. Plasma physics and Nuclear Fusion Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOI, P.O.Box: 14399-5113, Tehran – Iran
2. Physics Department, Kharazmi University, P.O.Box: 15614, Tehran - Iran

Abstract: The Grad- Shafranov equation plays an important role in the analysis of the plasma equilibrium in magnetic confinement configurations such as tokamak. In tokamaks which are operating in Ohmic heating regime, the Grad- Shafranov equation can be expanded through the inverse aspect ratio parameter. Consequently, the first order of the poloidal flux function and poloidal/radial components of the magnetic field are obtained. It is possible to estimate the Shafranov equilibrium parameter in a semi-analytical approach just by means of one of the magnetic field components. In this study, the Shafranov equilibrium parameter was estimated by means of the poloidal magnetic field experimental data, measured by the Damavand tokamak magnetic probes.

***Keywords:** Plasma equilibrium, Grad-Shafranov equation, Damavand tokamak*

*email: enoori@aeoi.org.ir

تاریخ دریافت مقاله: ۹۴/۲/۲۶   تاریخ پذیرش مقاله: ۹۴/۱۱/۲۰

۱. مقدمه

یکی از بنیادی‌ترین مسائل روز در زمینه‌ی پژوهش‌های هم‌جوشی هسته‌ای، مسئله‌ی تعادل و شرایط پایداری ماکروسکوپیکی پلاسما است. در یک ساختار چنبره‌ای[۱] مانند توکامک، تنها با داشتن میدان مغناطیسی چنبره‌ای[۲]، نمی‌توان پلاسما را در شرایط تعادل برای انجام واکنش هم‌جوشی هسته‌ای قرار داد. بنابراین برای ایجاد تعادل پایدار پلاسما، وجود یک میدان مغناطیسی عرضی (میدان قطبی[۳]) مورد نیاز است [۱]. از این‌رو در یک سیستم محصورسازی مغناطیسی، مطالعه‌ی نظری و تجربی تعادل و پایداری پلاسما از اهمیت بسیار زیادی برخوردار است.

از آن‌جا که معادلات توصیف‌کننده‌ی تعادل و پایداری پلاسما کاملاً غیرخطی هستند، پیدا کردن معادلات مشخصی که بتواند به طور کامل تعادل و پایداری پلاسما را توصیف کنند بسیار مشکل و در بسیاری از موارد غیرممکن است. یکی از مهم‌ترین معادلات به منظور بررسی شرایط تعادل پلاسمای محصور شده، معادله‌ی گراد- شفرانف[۴] است. به طور کلی، معادله‌ی گراد- شفرانف یک معادله‌ی دیفرانسیل غیرخطی غیرهمگن است که برای حل کامل آن به روش‌های عددی نیاز است. از این‌رو، روش‌های عددی گوناگونی برای حل معادله‌ی گراد- شفرانف و توصیف سطوح مغناطیسی پلاسما گسترش داده شده‌اند [۲]. علاوه بر آن، به روش‌های تحلیلی حل معادله‌ی گراد- شفرانف نیز توجه شده است و در سال‌های اخیر، روش‌های تحلیلی گوناگونی بنا بر انتخاب توابع غیرهمگن معادله‌ی گراد- شفرانف، ارائه شده‌اند که امکان حل کامل معادله‌ی گراد- شفرانف را داشته و سطوح مغناطیسی را به طور کامل رسم کرده‌اند [۳، ۴، ۵]. اهمیت توصیف تحلیلی معادله‌ی تعادل از آن نظر است که از یک سو می‌توان توصیف کامل‌تری از فیزیک تعادل پلاسمای توکامک داشت و از سوی دیگر می‌توان با در دست داشتن پارامترهای تعادلی پلاسما، نحوه‌ی تأثیر پارامترهای تعادلی در عملکرد توکامک را با دقت بیش‌تری بررسی نمود [۶-۹]. بنابراین روش‌های تحلیلی و نیمه‌تحلیلی گوناگونی مبتنی بر بسط معادله‌ی گراد- شفرانف برحسب پارامتر عکس نسبت تصویر[۵] توکامک، برای حل مرتبه‌های اول و دوم معادله‌ی گراد- شفرانف ارائه شده‌اند [۱۰، ۱۱]. با استفاده از حل‌های ارائه شده از معادله‌ی گراد- شفرانف، می‌توان شرایط تعادلی پلاسمای توکامک را بازسازی کرده و پارامترهای تعادلی پلاسما از جمله پارامتر شفرانف، بتای قطبی، القائیدگی داخلی پلاسما، جابه‌جایی افقی ستون پلاسما (جابه‌جایی شفرانف) و زمان محصورسازی انرژی پلاسما را محاسبه نمود [۱۲-۱۸]. از جمله مهم‌ترین پارامترهای تعادلی پلاسمای توکامک، پارامتر شفرانف[۶] است. پارامتر شفرانف معمولاً به صورت حاصل جمع دو کمیت القائیدگی داخلی و بتای قطبی پلاسما ($\beta_p + \frac{l_i}{۲}$) بیان می‌شود. این پارامتر کاربردهای فراوانی در تعیین شرایط تعادلی و ارائه‌ی الگویی مناسب برای کنترل شکل پلاسما دارد. به بیان دیگر با تعیین تحول پارامتر شفرانف (القائیدگی داخلی یا بتای قطبی پلاسما) و با به کار بردن مدل‌های کنترلی مناسب، می‌توان جابه‌جایی و تغییر شکل ستون پلاسما را در زمان واقعی[۷] از پیش برنامه‌ریزی[۸] کرد [۱۹]. به طور کلی تعیین تجربی پارامترهای تعادلی پلاسمای توکامک مانند پارامتر شفرانف، جابه‌جایی ستون پلاسما (جابه‌جایی شفرانف[۹])، بتای قطبی و القائیدگی داخلی پلاسما بر پایه‌ی اندازه‌گیری‌های مغناطیسی[۱۰] استوار است. می‌توان نشان داد که امکان اندازه‌گیری جداگانه القائیدگی داخلی پلاسما و بتای قطبی در توکامک‌های دایروی‌شکل بر پایه‌ی اندازه‌گیری‌های مغناطیسی در عمل غیرممکن نیست [۱۱] و در نتیجه امکان محاسبه‌ی کمیت $\beta_p + \frac{l_i}{۲}$ در توکامک‌هایی با سطح مقطع دایروی وجود دارد [۱۳، ۱۴، ۱۵].

در این مقاله، روشی نیمه تحلیلی مبتنی بر بسط مرتبه اول معادله‌ی گراد- شفرانف و با استفاده از داده‌های تجربی پروب‌های مغناطیسی توکامک دماوند، برای محاسبه‌ی پارامتر تعادلی شفرانف ارائه شده است. ابتدا تحلیلی از مرتبه‌ی اول تابع شار قطبی (برحسب پارامتر عکس نسبت تصویر) با فرض غیردایروی بودن پلاسمای توکامک به دست آمده است. با داشتن مرتبه‌ی اول تابع شار، مرتبه‌ی اول مؤلفه‌های قطبی و شعاعی میدان مغناطیسی برحسب پارامتر کشیدگی (بیضوی بودن پلاسما) و پارامتر شفرانف به دست آمد. با اندازه‌گیری از میدان‌های قطبی و شعاعی در طی یک شات نوعی از توکامک دماوند، تحول کیفی پارامتر شفرانف به دست آمد و در پایان نیز تحلیل خطای اندازه‌گیری پارامتر شفرانف ارائه شده است.

۲. معادلات اصلی حاکم بر مسئله

معادله‌ی گراد- شفرانف، یکی از موفق‌ترین ابزارهای توصیف تعادل پلاسمای توکامک در چارچوب نظریه‌ی هیدرودینامیک مغناطیسی[(۱۱)] است. به منظور به دست آوردن معادله‌ی گراد- شفرانف، پلاسما به صورت آرمانی، ایستا و با تقارن محوری در نظر گرفته می‌شود [۹]. یکی از دلایل اهمیت بسیار زیاد معادله‌ی گراد- شفرانف این است که مسئله‌ی تعادل پلاسما در مقیاس بزرگ را می‌توان با استفاده از یک معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیضوی توضیح داد که تنها متغیر آن، یک کمیت اسکالر است. برای حل مسئله‌ی تعادل، لازم است شرایط مرزی[(۱۲)] و شکل توابع آزاد[(۱۳)] معرفی شده، مشخص شوند. در حالت کلی، معادله‌ی گراد- شفرانف معادله‌ای غیرخطی است که با انتخاب مناسب نمایه‌ی[(۱۴)] چگالی جریان (توابع آزاد)، امکان حل عددی و یا تحلیل آن برای انواع ساختارها از جمله توکامک، امکان‌پذیر است.

در بسیاری از ساختارهای محصورسازی از جمله توکامک، بهتر است از مختصات چنبره‌ای (r, θ, φ) استفاده شود. به این ترتیب، معادله‌ی گراد- شفرانف در مختصات چنبره‌ای به شکل زیر تعریف می‌شود [۹]

$$\nabla^2\psi = -\mu_0\left(R_0 + r\cos\theta\right)^2 \frac{dP}{d\psi} - F\frac{dF}{d\psi} + \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\sin\theta\right) \qquad (۱)$$

تابع اسکالر ψ، با در نظر گرفتن یک ضریب 2π، به شکل شار میدان قطبی (شار قطبی[(۱۵)]) شناخته می‌شود. شکل کلی میدان مغناطیسی به صورت $B=B_\varphi\hat{e}_\varphi+B_p$ نشان داده می‌شود. کمیت‌های P و RB_φ به عنوان فشار پلاسما و تابع شار چنبره‌ای، به صورت توابعی از ψ تعریف می‌شوند

$$RB_\varphi = F(\psi) \qquad (۲)$$

$$P = P(\psi) \qquad (۳)$$

با داشتن تابع ψ، میدان مغناطیسی قطبی را نیز می‌توان در دستگاه مختصات چنبره‌ای تعریف کرد [۹]

$$B_P = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\hat{e}_\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\hat{e}_r\right) \qquad (۴)$$

در مورد توکامک‌هایی که در رژیم عملیاتی گرمایش اُهمی[(۱۶)] می‌باشند، کمیت‌های تعادلی را می‌توان براساس نسبت شعاع کوچک توکامک به شعاع اصلی چنبره، به عنوان پارامتر عکس نسبت تصویر $\varepsilon = \frac{a}{R_0}$، (با فرض $\varepsilon \ll 1$) بسط داد

$$\psi(r,\theta) = \psi_0(r) + \psi_1(r)\cos\theta + \psi_2(r)\cos(2\theta) + \cdots \qquad (۵)$$

که a و R_0 به ترتیب شعاع کوچک پلاسما و شعاع اصلی چنبره است.

فشار پلاسما نیز براساس بسط تیلور[(۱۷)]، به صورت زیر نوشته می‌شود

$$P(\psi) = P(\psi_0) + \frac{dP}{d\psi_0}\left(\psi_1 + \psi_2\right) + \frac{1}{2}\frac{d^2P}{d\psi_0^2}\psi_0^2 + \ldots \qquad (۶)$$

تابع آزاد $F(\psi)$، با معرفی تابع شاری معادل آن $[B_2(\psi)]$، به شکل زیر تعریف می‌شود

$$F^2(\psi) \equiv R_0^2\left[B_0^2 + 2R_0B_2(\psi)\right] \qquad (۷)$$

با بسط معادله‌ی (۱) و استفاده از معادلات (۳) تا (۵)، بسط‌های مرتبه‌ی صفرم و مرتبه‌ی اول معادله‌ی گراد- شفرانف به دست می‌آیند

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi_0}{dr}\right) = -\mu_0R_0^2\frac{dP}{d\psi_0} - \frac{d}{d\psi_0}\left(R_0^2B_0B_2\right) \qquad (۸)$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\psi_1}{dr}\right) - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\mu_0}{B_\theta}\frac{dJ_\varphi}{dr}\right)\psi_1 = -2\mu_0\frac{r}{B_\theta} - \frac{dP}{dr} + B_\theta \qquad (۹)$$

فرض می‌شود که آخرین سطح بسته‌ی مغناطیسی[(۱۸)] شار قطبی، شکلی شبیه بیضی داشته باشد [۱۱]

$$r_S = a\left[1 + \frac{\kappa - 1}{2}\left(1 - \cos2\theta\right)\right]$$

$$\frac{\kappa - 1}{2} \sim \varepsilon \qquad (۱۰)$$

که در آن κ به عنوان پارامتر کشیدگی[۱۹] توکامک معرفی می‌شود. شرایط مرزی روی سطح شار، مقداری ثابت تعریف می‌شود. بدون از دست دادن کلیات مسئله، این مقدار ثابت را می‌توان برابر با صفر در نظر گرفت. در ادامه فرض می‌شود که تابع فشار تا بخشی از شعاع داخلی پلاسما (r=c)، به صورت سهموی تغییر کند و بعد از آن صفر باشد. چگالی جریان چنبره‌ای نیز به صورت تابع پله‌ای در نظر گرفته می‌شود

$$P(r)=\begin{cases} P_{\circ}\left(1-\dfrac{r^{2}}{c^{2}}\right) & \text{for } \circ<r<c \\ \circ & \text{for } r\geq c \end{cases}$$

$$J_{\varphi}(r)=\begin{cases} J_{\circ} & \text{for } \circ<r<c \\ \circ & \text{for } r\geq c \end{cases} \qquad (۱۱)$$

با استفاده از شکل چگالی جریان و قانون آمپر، مرتبه‌ی صفرم میدان مغناطیسی- قطبی به دست می‌آید

$$B_{\theta}(r)=\begin{cases} \dfrac{\mu_{\circ}I}{2\pi c}\left(\dfrac{r}{c}\right) & \circ<r<c \\ \dfrac{\mu_{\circ}I}{2\pi c}\left(\dfrac{c}{r}\right) & r\geq c \end{cases} \qquad (۱۲)$$

به بیان دیگر نسبت c/a به عنوان یک پارامتر شکل‌دهی جریان پلاسما معرفی می‌شود که نمایه‌ی جریان پلاسما را تعیین می‌کند.

در بسط مرتبه‌ی اول تابع شار، شرایط مرزی را می‌توان دوباره بازتعریف کرد

$$\psi_{1}(a,\theta)=-\frac{a(\kappa-1)}{4}\frac{d\psi_{1}(r)}{dr}\bigg|_{r=a} \qquad (۱۳)$$

با در نظر گرفتن مرتبه‌ی صفرم تابع فشار، چگالی جریان، میدان مغناطیسی قطبی، استفاده از شرط مرزی و پیوستگی تابع شار معادله‌ی (۹) به صورت تحلیلی قابل حل خواهد بود

$$\psi_{1}(r,\theta)=\frac{\mu_{\circ}I_{p}r}{4\pi\kappa}\left[1-\frac{1}{4}\frac{(\kappa^{2}-1)}{\kappa^{2}}\right]^{-1}\left\{\ln\left(\frac{r}{a}\right)+\left(\Lambda+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{a^{2}}{r^{2}}\right)-\frac{a^{2}}{r^{2}}\frac{(\kappa-1)}{2(\kappa+3)}\right\}\cos\theta,\qquad r>c \qquad (۱۴)$$

با استفاده از معادله‌ی (۴)، مرتبه‌ی اول مؤلفه‌های قطبی و شعاعی میدان مغناطیسی قطبی به شکل زیر به دست می‌آیند

$$\begin{cases} B_{1r}=-\dfrac{1}{R_{\circ}r}\dfrac{\partial\psi_{1}}{\partial\theta}=-\dfrac{1}{R_{\circ}r}\psi_{1}\sin\theta \\ B_{1\theta}=\left[\dfrac{1}{R_{\circ}}\dfrac{\partial\psi_{1}}{\partial r}-\dfrac{r}{R_{\circ}}B_{\circ\theta}(r)\right]\cos\theta \end{cases}$$

$$B_{1\theta}=\frac{\mu_{\circ}I_{p}}{4\pi R_{\circ}\kappa}\left[1-\frac{1}{4}\frac{(\kappa^{2}-1)}{\kappa^{2}}\right]^{-1}\left\{\ln\left(\frac{r}{a}\right)+\left(\Lambda+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{a^{2}}{r^{2}}\right)+\frac{a^{2}}{r^{2}}\frac{(\kappa-1)}{2(\kappa+3)}-1\right\}\cos\theta \qquad (۱۵)$$

$$B_{1r}=\frac{\mu_{\circ}I_{p}}{4\pi R_{\circ}\kappa}\left[1-\frac{1}{4}\frac{(\kappa^{2}-1)}{\kappa^{2}}\right]^{-1}\left\{\ln\left(\frac{r}{a}\right)+\left(\Lambda+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{a^{2}}{r^{2}}\right)-\frac{a^{2}}{r^{2}}\frac{(\kappa-1)}{2(\kappa+3)}\right\}\sin\theta \qquad (۱۶)$$

در معادلات بالا، پارامتر شفرانف به صورت معادله‌ی زیر تعریف می‌شود

$$\Lambda=\beta_{p}+\frac{l_{i}}{2}-1 \qquad (۱۷)$$

کمیت‌های بتای قطبی و القائیدگی داخلی پلاسما نیز به شکل زیر تعریف می‌شوند [۱، ۹]

$$\beta_{p}=\frac{2\mu_{\circ}\langle P\rangle}{\bar{B}_{p}^{2}}$$

$$\bar{B}_{p}=\frac{\oint B_{p}dl_{p}}{\oint dl_{p}}=\frac{\int\mu_{\circ}J_{\varphi}dS_{\varphi}}{\oint dl_{p}}$$

$$\langle P\rangle=\frac{\int P dr}{\int dr} \qquad (۱۸)$$

$$l_i = \frac{\left\langle B_p^2 \right\rangle_V}{\left\langle B_p \right\rangle_L^2} = \frac{\left(\oint dl\right)^2}{2\pi\mu_0 I_p^2}\frac{\iint \psi J_\varphi dRdZ}{\int RdRdZ} \qquad (۱۹)$$

فرض شده است که با به کار بستن یک میدان مغناطیسی عمودی، اثر جابه‌جایی افقی ستون پلاسما خنثی شده باشد [۹، ۱۱]. از آن‌جا که جابه‌جایی ستون پلاسما به صورت یک پارامتر مستقل معرفی می‌شود، بنابراین برای ساده‌سازی بیش‌تر مسئله، در به دست آوردن معادلات (۱۵) و (۱۶)، جمله‌ی مربوط به جابه‌جایی ستون پلاسما به صورت جابه‌جایی شفرانف، در نظر گرفته نشده است. در تقریب مرتبه‌ی اول بسط معادله‌ی گراد- شفرانف در مختصات سیستم چنبره‌ای، معادلات مؤلفه‌های میدان قطبی، وابستگی آشکار به بتای قطبی و القائیدگی داخلی پلاسما نداشته و فقط به پارامتر شفرانف بستگی دارند. در واقع معادلات (۱۵) و (۱۶)، تصحیح مرتبه‌ی اول مؤلفه‌های قطبی و شعاعی میدان مغناطیسی قطبی هستند که برای سطوح شاری غیردایروی مطابق معادله‌ی (۱۰) به دست آمده‌اند. به ازای $\kappa \to 1$، معادلات (۱۵) و (۱۶)، به معادلات میدان‌های مغناطیسی قطبی توکامک‌هایی با سطح مقطع دایروی تبدیل می‌شوند [۱۳، ۱۴، ۱۵]. از آن‌جا که معادله‌های (۱۵) و (۱۶) به وضوح به پارامتر شفرانف بستگی دارند، با داشتن یکی از مؤلفه‌های میدان مغناطیسی قطبی (مؤلفه‌ی قطبی)، امکان محاسبه‌ی پارامتر شفرانف وجود دارد. در حالت کلی، در سیستم مختصات چنبره‌ای، مؤلفه‌های قطبی و شعاعی میدان مغناطیسی قطبی را می‌توان برحسب هماهنگ‌های سری فوریه[۲۰] به صورت زیر نوشت [۱۲، ۱۳]

$$B_\theta = \sum_{n=0} \lambda_n \cos(n\theta) \qquad (۲۰)$$

$$B_r = \sum_{n=0} \mu_n \sin(n\theta) \qquad (۲۱)$$

ضرایب λ_n و μ_n دامنه‌های هماهنگ‌های بسط فوریه (مرتبه‌های بالاتر میدان مغناطیسی) هستند که می‌توان آن‌ها را با تحلیل داده‌های تجربی پروب‌های مغناطیسی قطبی و شعاعی محاسبه کرد

$$B_{\theta n} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} B_{\theta_j} \cos(n\theta_j) \qquad (۲۲)$$

$$B_{rn} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} B_{r_j} \sin(n\theta_j) \qquad (۲۳)$$

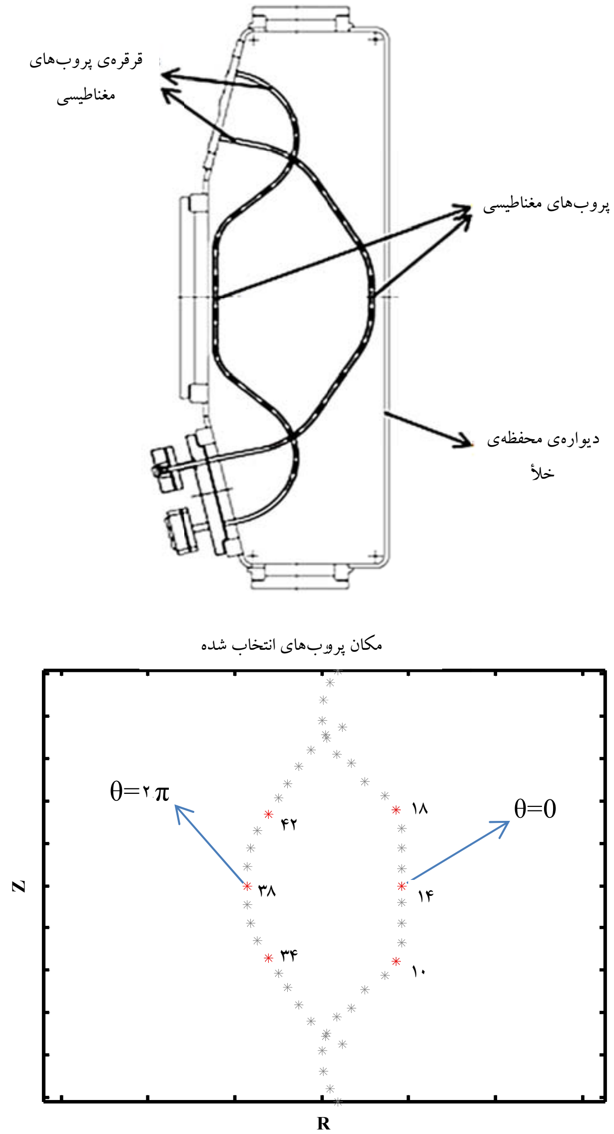
n نشان‌دهنده‌ی مرتبه‌ی هماهنگ و N نشان‌دهنده‌ی تعداد پروب به کار رفته طی فرایند اندازه‌گیری هستند. B_{θ_j} و B_{r_j} مقادیر مؤلفه‌های قطبی و شعاعی میدان قطبی هستند که مقدار آن‌ها توسط jامین پروب مغناطیسی اندازه‌گیری می‌شود.

۳. نتایج اندازه‌گیری

با توجه به شرایط مرزی، شکل توابع آزاد انتخاب شده و بسط مرتبه‌ی اول معادله‌ی گراد- شفرانف، پارامتر شفرانف بر پایه‌ی نتایج تجربی پروب‌های مغناطیسی توکامک دماوند می‌توانند به دست آید. تحول زمانی جریان پلاسما نیز توسط پیچه‌های روگوفسکی داده می‌شود. توکامک دماوند، توکامکی با اندازه‌ی کوچک و سطح مقطع کشیده است که پارامترهای اصلی آن در جدول ۱ آمده است. گرمایش پلاسما در توکامک دماوند به صورت اُهمی[۲۱] انجام می‌گیرد و به منظور جداسازی پلاسما از محفظه‌ی خلأ از محدودکننده‌هایی[۲۲] از جنس فولاد استفاده شده است. برای محاسبه‌ی پارامتر شفرانف، تعداد ۶ پروب مغناطیسی قطبی که مؤلفه قطبی میدان مغناطیسی قطبی را در زوایای مختلف اندازه‌گیری می‌کنند، انتخاب شده‌اند. در شکل ۱ به صورت طرح‌وار، سطح مقطع، آرایه‌ی پروب‌های مغناطیسی اطراف محفظه‌ی خلأ و محل قرارگیری پروب‌های مغناطیسی قطبی در توکامک دماوند نشان داده شده‌اند. پروب‌های مغناطیسی قطبی، دارای خودالقائی ۰٫۶۶ mH و مقاومت ۱۸٫۵ Ω هستند.

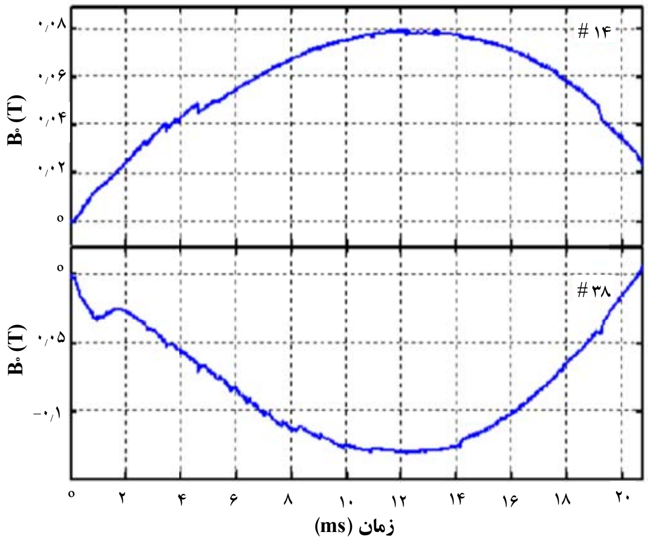
جدول ۱. مشخصات پارامترهای اصلی و تشخیصی توکامک دماوند

پارامتر توکامک	مقدار
شعاع اصلی چنبره	۳۶ cm
شعاع فرعی چنبره	۷ cm
نسبت تصویر	۵٫۱
سطح مقطع محفظه‌ی خلأ (نسبت ارتفاع پلاسما به پهنای آن)	$\frac{2a}{2b} = \frac{14}{20}$
بیشینه میدان مغناطیسی چنبره‌ای	۱٫۲ T
دوره‌ی زمانی تخلیه‌ی پلاسما	<۲۵ ms
بیشینه چگالی پلاسما	$<3\times10^{19}\ m^{-3}$
بیشینه دمای الکترونی	<۳۰۰ eV
بیشینه دمای یونی	<۱۵۰ eV
بیشینه جریان پلاسما	<۴۰ kA
میزان کشیدگی پلاسما	≈ ۱٫۴
تعداد پیچه‌های روگوفسکی	۲
تعداد پیچه‌های میرنف شعاعی	۲۴
تعداد پیچه‌های میرنف قطبی	۲۴

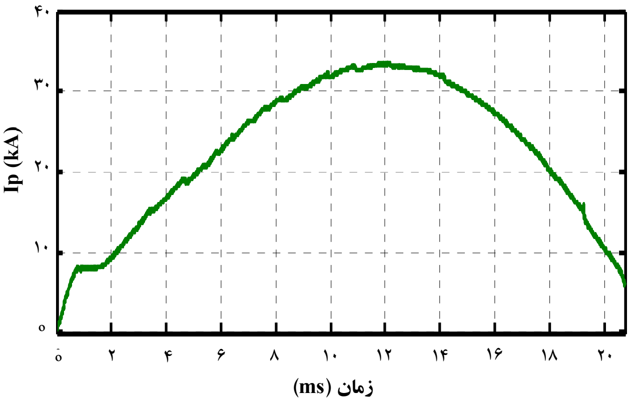


شکل ۱. محل قرارگیری پروب‌های مغناطیسی در توکامک دماوند.

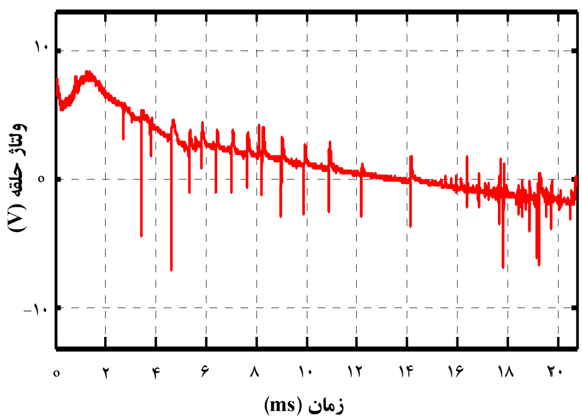
به عنوان نمونه در شکل ۲ تحول زمانی میدان مغناطیسی قطبی در ۲ پروب از ۶ پروب مورد نظر، در زاویه‌های صفر و 2π در یک شات از توکامک نشان داده شده است. در شکل‌های ۳ تا ۵، تحول زمانی جریان پلاسما، ولتاژ حلقه‌ی پلاسما و نتیجه‌ی اولیه‌ی محاسبه‌ی پارامتر شفرانف نشان داده شده است. پارامترهای پلاسمای توکامک در هنگام انجام آزمایش به ترتیب: میدان مغناطیسی چنبره‌ای ۱٫۲ T، بیشینه جریان پلاسما ۴۰ kA و بیشینه چگالی پلاسما (n_e) کم‌تر از $3\times10^{19}\ m^{-3}$ هستند [۲۰].



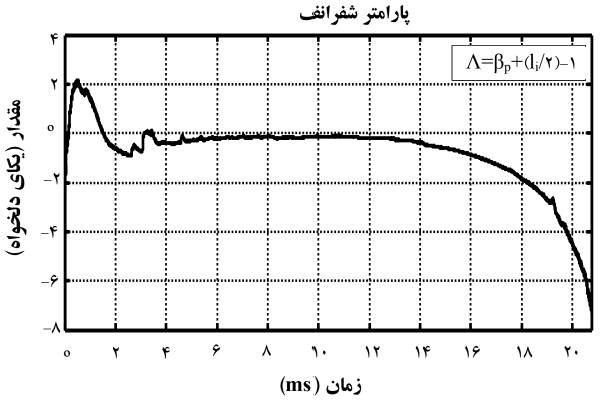
شکل ۲. تحول زمانی مؤلفه‌ی قطبی میدان مغناطیسی قطبی- پروب‌های مغناطیسی شماره‌ی ۱۴ (زاویه‌ی قطبی صفر درجه) و ۳۸ (زاویه‌ی قطبی ۱۸۰ درجه) در یک شات نمونه‌ای توکامک.



شکل ۳. تحول زمانی جریان پلاسما در یک شات نمونه‌ای توکامک دماوند.



شکل ۴. تحول زمانی ولتاژ حلقه‌ی پلاسما در یک شات نمونه‌ای توکامک دماوند.



شکل ۵. تحول زمانی پارامتر شفرانف (نتیجه‌ی اولیه‌ی تحلیل یک شات نمونه‌ای توکامک دماوند).

۴. نتایج محاسبات انجام شده

با توجه به این که پروب‌های مغناطیسی در یک مسیر دایروی قرار نگرفته‌اند، برای ساده‌سازی بیش‌تر مسئله فرض می‌شود که پروب‌های مغناطیسی بر روی مسیری دایروی قرار گرفته‌اند. به این منظور دایره‌ای به محل قرار گرفتن پروب‌های مغناطیسی مورد نظر برازش می‌شود. شعاع دایره‌ی فرضی که پروب‌های مغناطیسی در آن قرار می‌گیرند را می‌توان از روش تقریب کم‌ترین مربعات[۲۳] به دست آورد [۲۱، ۲۲]. با توجه به مکان پروب‌ها، شعاع دایره‌ی برازش شده بر مکان پروب‌ها، R=۱۰/۶۷ cm، و میزان خطای برازش نیز ۲۱٪ به دست آمده است.

مقدار خطا در اندازه‌گیری تجربی هماهنگ kام میدان مغناطیسی قطبی، مربوط به پروب مغناطیسی شماره‌ی m، به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۱]

$$\Delta B_{\theta k}=\frac{\Delta B_\theta}{N}\cos(k\theta_m) \qquad (۲۴)$$

که در آن ΔB_θ، میزان خطای مؤلفه‌ی قطبی میدان مغناطیسی اندازه‌گیری شده توسط یک پروب مغناطیسی است (فرض می‌شود برای همه‌ی پروب‌ها مقدار یکسانی را داشته باشد). این خطا می‌تواند شامل میزان دقت اندازه‌گیری پروب مغناطیسی، خطا در محل قرار گرفتن پروب‌های مغناطیسی در محفظه‌ی خلأ، خطا در محاسبه‌ی ضریب کالیبراسیون پروب‌های مغناطیسی و ... باشد. مجذور خطای کلی هماهنگ kام ناشی از همه‌ی پروب‌های اندازه‌گیری، به صورت مربع معادله‌ی (۲۴) و جمع بر روی همه‌ی پروب‌های مغناطیسی است که با رابطه‌ی زیر نشان داده می‌شود

$$\left(\Delta B_{\theta k}\right)^2=\left(\frac{\Delta B_\theta}{N}\right)^2\sum_{m=1}^{N}\cos^2(k\theta_m) \qquad (۲۵)$$

برای هماهنگ مرتبه‌ی اول (k=۱)، معادله‌ی (۲۵) به صورت معادله‌ی (۲۶) ساده می‌شود

$$\left(\Delta B_{\theta 1}\right)^2=\left(\frac{\Delta B_\theta}{N}\right)^2\sum_{m=1}^{N}\cos^2\theta_m=\left(\frac{\Delta B_\theta}{N}\right)^2\sum_{m=1}^{N}\frac{1}{2}\left(1+\cos(2\theta_m)\right) \qquad (۲۶)$$

جمله‌ی دوم سمت راست معادلات (۶) تا (۸)، مربوط به هماهنگ دوم بسط فوریه است که در تعیین خطای هماهنگ اول می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. خطای نسبی در اندازه‌گیری مؤلفه‌ی قطبی و هماهنگ اول بسط فوریه میدان مغناطیسی قطبی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\delta b_\theta\equiv\frac{\Delta B_\theta}{\Delta B_\theta}$$
$$\delta b_{\theta 1}\equiv\frac{\Delta B_{\theta 1}}{B_\theta}=\frac{1}{\sqrt{2N\varepsilon}}\delta b_\theta \qquad (۲۷)$$

که در آن مؤلفه‌ی قطبی میدان مغناطیسی قطبی به صورت پارامتر $b_\theta=B_\theta\Big/\left(\frac{\mu_0 I_p}{4\pi R_0}\right)$ بدون بُعد شده است. در گام بعدی باید میزان خطای پارامتر شفرانف محاسبه شده را با استفاده از هماهنگ اول بسط فوریه میدان مغناطیسی قطبی، به دست آورد. هماهنگ اول میدان قطبی را می‌توان به صورت $b_{\theta 1}=b_{\theta 1 exact}+\Delta b_{\theta 1}$ نوشت. با بسط تیلور این معادله خواهیم داشت

$$b_{\theta 1}(\Lambda)=b_{\theta 1 exact}+\frac{db_{\theta 1}}{d\Lambda}\Delta\Lambda+\frac{1}{2}\frac{d^2 b_{\theta 1}}{d\Lambda^2}(\Delta\Lambda)^2+\cdots \qquad (۲۸)$$

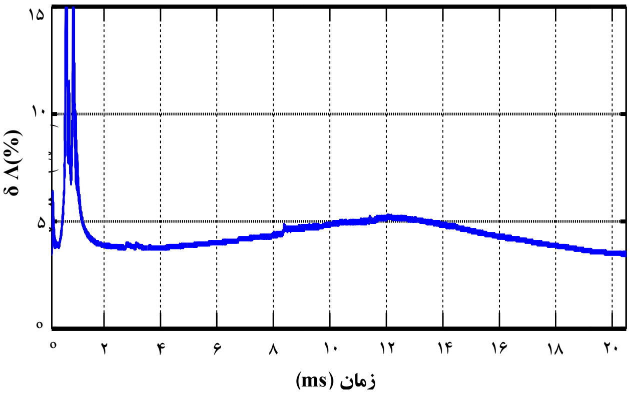
به دلیل ناچیز بودن سهم جملات مرتبه‌های بالاتر، از جملات مرتبه‌ی $(\Delta\Lambda)^2$ و بالاتر می‌توان صرف‌نظر کرد. در این صورت خطای نسبی در محاسبه‌ی پارامتر شفرانف به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\delta\Lambda \equiv \frac{\Delta\Lambda}{\Lambda} = \left[\frac{1}{\left|\frac{db_{\theta 1}}{d\Lambda}\right|} \frac{b_{\theta 1}}{\Lambda} \right] \delta b_{\theta 1} \qquad (۲۹)$$

جمله $E_\theta = \left| b_{\theta 1} \Big/ \Lambda \left(\frac{db_{\theta 1}}{d\Lambda} \right) \right|$ با عنوان عامل انتشار خطای[۲۴] میدان قطبی شناخته می‌شود که در شکل ۵ به ازای مقادیر مختلف Λ محاسبه شده در یک شات توکامک دماوند، نشان داده شده است.

همان‌گونه که از شکل‌های ۳ و ۶ مشخص است، بهترین بازه‌ی زمانی برای محاسبه‌ی پارامتر شفرانف، از ۶ تا ۱۲ ms است که در طی آن عامل انتشار خطا از مقدار ۰/۰۱۵ تا ۰/۴ تغییر می‌کند. در این بازه‌ی زمانی جریان پلاسما به بیشینه مقدار خود رسیده و در منطقه‌ی هموار[۲۵] قرار می‌گیرد. با فرض این‌که خطای مربوط به دقت اندازه‌گیری و ضریب کالیبراسیون پروب‌های مغناطیسی ۴٪ و خطای ناشی از برازش دایره به محل قرار گرفتن پروب‌ها ۲۱٪ باشد، خطای نسبی محاسبه‌ی پارامتر شفرانف در محدوده‌ی ۰/۶ تا ۱۴٪ خواهد بود که نشان‌دهنده‌ی مناسب بودن الگوی استفاده شده برای محاسبه‌ی پارامتر شفرانف در بازه‌ی زمانی یاد شده است.

از آن‌جا که بازه‌ی زمانی مطلوب برای محاسبه‌ی پارامتر شفرانف از ۶ تا ۱۲ ms است، جریان پلاسما تا قبل از وقوع پدیده‌ی گسیختگی[۲۶] رسم و بر مبنای آن، محاسبه‌ی پارامتر شفرانف انجام شده است. با توجه به شکل ۵ در منطقه‌ی هموار (بازه‌ی زمانی ۶ تا ۱۲ ms) پارامتر شفرانف تقریباً ثابت است. به منظور دقیق‌تر شدن تحلیل پارامتر تعادلی پلاسمای توکامک، به اضافه نمودن پروب‌های مغناطیسی شعاعی نیاز است که در آینده انجام خواهد گرفت.



شکل ۶. چگونگی تحول خطای پارامتر شفرانف محاسبه شده در طی یک شات برای توکامک دماوند.

۵. بحث و نتیجه‌گیری

۱. معادله‌ی تعادلی گراد- شفرانف در دستگاه مختصات چنبره‌ای برحسب پارامتر عکس نسبت تصویر، تا مرتبه‌ی اول بسط داده شد.

۲. با به دست آمدن مرتبه‌ی اول تابع شار قطبی، مرتبه‌ی اول مؤلفه‌های قطبی و شعاعی میدان مغناطیسی قطبی نیز به دست آمد.

۳. پس از به دست آوردن میدان مغناطیسی قطبی، وابستگی مرتبه‌ی اول مؤلفه‌های قطبی و شعاعی میدان قطبی به پارامتر تعادلی شفرانف مشخص شد و معادله‌ای نیمه تجربی برای به دست آوردن پارامتر شفرانف به دست آمد.

۴. تحول کیفی و کمّی پارامتر شفرانف در طول یک شات نمونه‌ای توکامک دماوند توسط داده‌های تجربی شش پروب مغناطیسی قطبی در زوایای مختلف محاسبه شده است.

۵. سرانجام نیز میزان خطای مربوط به محاسبه‌ی پارامتر شفرانف با استفاده از اندازه‌گیری مؤلفه‌ی قطبی میدان مغناطیسی قطبی توسط پروب‌های مغناطیسی بررسی شد. بخشی از خطای محاسبه شده مربوط به برازش دایره بر محل قرار گرفتن پروب‌ها و بخش دیگر آن مربوط به دقت اندازه‌گیری پروب‌های مغناطیسی بود. قرار گرفتن مقدار خطا در محدوده‌ی ۰/۶ تا ۱۴٪ نشان داد که الگوی پیشنهاد شده می‌تواند برای محاسبه‌ی پارامتر تعادلی شفرانف در توکامک‌هایی با سطح مقطع غیردایروی و در رژیم عملیاتی گرمایش اُهمی مناسب باشد.

در ادامه‌ی پژوهش پیرامون تعیین نیمه‌تحلیلی پارامترهای تعادلی پلاسمای توکامک، برای دقیق‌تر شدن تحلیل، نیاز به اضافه نمودن تعداد بیش‌تری پروب مغناطیسی شعاعی و قطبی در زوایای متفاوت است که در آینده انجام خواهد گرفت. از آن‌جا که محاسبه‌ی جابه‌جایی شفرانف مستقل از پارامتر شفرانف است، در مطالعات آینده به منظور محاسبه‌ی جابه‌جایی شفرانف، لازم است تا معادلات به دست آمده برای مرتبه‌ی اول مؤلفه‌های شعاعی و قطبی میدان مغناطیسی، دوباره مرتبه‌سازی شوند (برحسب مرتبه جابه‌جایی شفرانف) تا معادلات جدیدتری به دست آیند.

پی‌نوشت‌ها

1. Toroidal configuration
2. Toroidal magnetic field
3. Poloidal magnetic field
4. Grad-Shafranov equation
5. Inverse aspect ratio
6. Shafranov parameter
7. Real time
8. Pre-programming
9. Shafranov shift
10. Magnetic measurements
11. Magneto hydrodynamics
12. Boundary conditions
13. Free functions
14. Profile
15. Poloidal flux
16. Ohmic heating regime
17. Taylor expansion
18. Last closed magnetic surface
19. Elongation factor
20. Fourier series harmonics
21. Ohmic heating
22. Limitter
23. Least squares approximation
24. Error propagation factor
25. Flat zone
26. Disruption

مرجع‌ها

[1] J. Wesson, Tokamaks, Oxford University Press, (2011) 149-152.

[2] T. Takeda, S. Tokuda, Computation of MHD equilibrium of tokamak plasma, J. Com. Phys. 1 (1991) 93-201.

[3] S. Zheng, A. Wootton, E.R. Solano, Analytical tokamak equilibrium for shaped plasmas, Phys. Plasmas, 3 (1996) 1176-1185.

[4] C. Atanasiu, Analytical solutions to the Grad–Shafranov equation, Phys. Plasmas, 11 (2004) 3510-3516.

[5] A.J. Cerfon, J.P. Freidberg, One size fits all, analytic solutions to the Grad–Shafranov equation, Phys. Plasmas, 17 (2010) 032502-032508.

[6] K. Miyamoto, Plasma physics and controlled nuclear fusion, Springer, (2006) 38-45.

[7] V.D. Shafranov, On magnetohydrodynamical equilibrium configurations, Sov. JETP, 6 (1958) 545-566.

[8] V.S. Mukhovatov, V. Shafranov, Plasma equilibrium in a tokamak, Nucl. Fusion, 11 (1971) 605-617.

[9] J.P. Freidberg, Ideal magnetohydrodynamics, Plenum Publishing Company Limite, (1987) 315-325.

[10] S.P. Hakkarainen, R. Betti, J.P. Freidberg, R. Gormley, Natural elongation and triangularity of tokamak equilibria, Phys. of fluids B, 2(7) (1990) 1565-1572.

[11] J.P. Freidberg, M. Graf, A. Niemczewski, S. Schultz, Why β_P and l_i cannot be separately measured in a near circular tokamak, Plasma Phys. Cont. Fusion 35 (1993) 1641-1655.

[12] V. Shafranov, Determination of the parameters β_P and l_i in a Tokamak for arbitrary shape of plasma pinch cross-section, Plasma Phys., 13 (1971) 9-17.

[13] H. Ninomiya, N. Suzuki, Estimations of Plasma Position and $\beta_P+l_i/2$ from Magnetic Measurements under High-β Conditions in JET-2, Jpn. J. Appl. Phys, 21 (1982) 1323-1330.