



شبیه‌سازی جریان دوفازی شار رانشی در یک کانال عمودی با استفاده از روش نیوتن-کریلف

حسن اسمعیلی^۱، حسین کاظمی‌نژاد^{۲*}، حسین خلفی^۱، سید محمد میروکیلی^۱

۱. پژوهشکده راکتور و ایمنی هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۱۳۳۹-۱۴۱۵۵، تهران، ایران

۲. پژوهشکده کاربرد پرتوها، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۱۱۳۶۵-۳۴۸۶، تهران، ایران

*Email: hkazeminejad@aeoi.org.ir

مقاله‌ی پژوهشی

تاریخ دریافت مقاله: ۹۹/۲/۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۶/۳

چکیده

در این پژوهش، یک روش عددی به‌منظور مدل‌سازی جریان جوشش زیر سرد در یک کانال عمودی با استفاده از مدل شار رانشی ارایه شده است. سیستم معادلات غیرخطی با روشی کاملاً ضمنی و با استفاده از روش نیوتن-کریلف مستقل از ژاکوبین (JFNK) حل شده‌اند. به‌منظور بهبود کارایی روش JFNK و پایداری عددی، پیش شرط‌ساز نیمه‌ضمنی بر پایه فیزیک مسئله پیاده‌سازی شده است. اخیراً پژوهشگران برای حل معادلات تنک، بزرگ و کاهش هزینه محاسبات، به‌طور گسترده‌ای از روش JFNK در تدوین نرم‌افزارهای ترموهیدرولیک هسته‌ای استفاده نموده‌اند. به‌منظور اعتبارسنجی، نتایج به‌دست آمده با داده‌های آزمایشگاهی، نتایج نرم‌افزار RELAP5 و نیز نتایج حاصل از شبیه‌سازی با روش نیمه‌ضمنی مقایسه شده و توافق مناسبی به‌دست آمد. مقایسه نتایج نشان می‌دهد که روش JFNK با پیش شرط‌ساز نیمه‌ضمنی، همگرایی را حداقل به مقدار ۵۰٪ سرعت بخشیده و همچنین قابلیت پیش‌بینی کسر بخار با میانگین خطای مطلق کمتر از ۷/۳۴٪ در گستره قابل ملاحظه‌ای از فشار را داراست.

کلیدواژه‌ها: جریان دوفازی، مدل شار رانشی، روش نیوتن-کریلف

Simulation of two-phase flow drift flux model in a vertical channel using Newton-Krylov method

H. Esmaili¹, H. Kazeminejad^{2*}, H. Khalafi¹, S.M. Mirvakili¹

1. Nuclear Science and Technology Research Institute (NSTRI), AEOL, P.O. Box 11365-3486, Tehran, Iran

2. Radiation Application Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOL, P.O.Box:11365-3486, Tehran Iran

Research Article

Received 24.4.2020, Accepted 24.8.2020

Abstract

In the present work, a numerical method is proposed in order to model the subcooled boiling flow in a vertical channel using the Drift Flux Model. The system of nonlinear equations is solved with the fully-implicit scheme using the Jacobian-free Newton-Krylov (JFNK) method. In order to improve the efficiency of the JFNK method and its numerical stability, a semi-implicit physics based preconditioning (PBP) is implemented. Recently, the JFNK method has been widely used to solve large and sparse system of equations. To validate the proposed method, the results were compared with the experimental data, the results of modeling by using the RELAP5 code, and the available numerical results in the literature. It was found that the results corresponding to the present work have a good agreement with those of the other mentioned methods. Also, it was found that the convergence rate of the JFNK method with the PBP is at least 50% higher than the JFNK method, and the void fraction mean absolute percentage error (MAPE) is less than 7.34% over a wide range of flow and pressure.

Keywords: Two-phase flow, Drift Flux Model, JFNK method



۱. مقدمه

در بسیاری از سیستم‌های مهندسی، پدیده جریان‌های دوفازی به وفور اتفاق می‌افتد. مسایل دوفازی را می‌توان با استفاده از مدل جریان همگن، مدل دو سیالی و یا مدل شار رانشی فرمول بندی کرد [۱]. در مدل دو سیالی فرض می‌شود که هر فاز به صورت جداگانه رفتار می‌کند. بنابراین در این مدل، برای فازهای مختلف سیال معادلات پایستگی جرم، انرژی و تکانه خطی به طور جداگانه اعمال می‌شوند. از سوی دیگر، در مدل شار رانشی حرکت کل مخلوط با استفاده از معادله تکانه مخلوط بیان شده و حرکت نسبی بین فازها با استفاده از روابط سینماتیک تعریف می‌شود؛ بنابراین فرمول‌بندی و حل عددی روش شار رانشی از مدل دو سیالی ساده‌تر است [۲].

برای حل معادلات غیرخطی حاصل از جریان دوفازی از روش‌های عددی مختلفی استفاده می‌شود، که برخی بر مبنای روش نیمه‌ضمنی [۳-۷] و برخی بر مبنای کاملاً ضمنی [۸] هستند. در جداسازی کاملاً ضمنی، حل مستقیم معادلات جریان دوفازی به دلیل مدل‌ها و روابط غیرخطی و همچنین ماهیت جریان‌های دوفازی، بسیار سخت و پیچیده است. برای حصول پایداری معمولاً از یک روش تکرار^۱ استفاده می‌شود. در این گونه مسایل، در هر گام زمانی لازم است یک ماتریس بزرگ و تنک در هر تکرار نیوتن حل شود. در حالت کلی این فرایند از نظر محاسباتی بسیار پرهزینه است چرا که زمان، CPU و فضای لازم جهت ذخیره محاسبات مربوط به آن بسیار زیاد است.

در سال‌های اخیر، برای حل مؤثر مسایل به شدت غیرخطی از روش JFNK استفاده می‌شود [۹]. روش JFNK یک روش چند سطحی برای حل سیستم معادلات غیرخطی بزرگ است. در حالت کلی، فرایند حل از دو سطح تشکیل شده است: حلقه خارجی نیوتن برای حل غیرخطی و حلقه داخلی کرلیف برای حل سیستم معادلات خطی مربوط به تکرار نیوتن. ویژگی اصلی روش JFNK ادغام روش نیوتن با روش تکرار کرلیف برای حل مسایل غیرخطی کاملاً ضمنی است. در روش نیوتن یکی از پرهزینه‌ترین و مشکل‌آفرین‌ترین قسمت‌ها، تشکیل و محاسبه ماتریس ژاکوبین است. در حالی که در روش کرلیف، نیازی به تشکیل ماتریس ژاکوبین نیست و تنها به ضرب بردار-ماتریس نیاز است. این فرایند هزینه محاسبات را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش می‌دهد [۹].

روش JFNK به خودی خود روش مؤثری نیست. کلید موفقیت این روش، استفاده از یک پیش‌شرط‌ساز مؤثر و حدس اولیه خوب است. در واقع برای بهبود پایداری عددی و هم‌چنین آهنگ همگرایی روش JFNK، به یک پیش‌شرط‌ساز نیاز است. شیوه‌های مختلفی برای پیش‌شرط‌سازی روش JFNK وجود دارد که در مرجع [۹] مورد بحث قرار گرفته‌اند. در برخی پژوهش‌ها [۱۰-۱۲] از روش سیمپل و در برخی نیز از روش اختلاف محدود [۱۳] به عنوان پیش‌شرط‌ساز استفاده شده است. اخیراً توجه بسیاری از پژوهشگران به پیش‌شرط‌ساز بر پایه فیزیک مسئله معطوف شده است. در مقایسه با سایر روش‌ها، پیش‌شرط‌ساز بر پایه فیزیک مسئله (PBP) به طور معمول با نگاهی به رفتار فیزیکی مسئله و کسب بینشی از آن ایجاد می‌شود [۱۴]. یک پیش‌شرط‌ساز بر پایه فیزیک مسئله را می‌توان از جداسازی نیمه‌ضمنی معادلات حاکم به دست آورد [۱۵-۱۶]. لیان هو و همکاران [۱۷] یک روش JFNK با یک PBP برای مسئله جریان دوفازی یک‌بعدی در یک کانال را ارائه نموده‌اند. در این پژوهش PBP با استفاده از جداسازی زمانی نیمه‌ضمنی معادلات حاکم در مدل شار رانشی به دست آمده است. نتایج حاصل از روش فوق نشان می‌دهد که این روش از دقت خوبی برخوردار است. انتخاب یک PBP مناسب می‌تواند تعداد زیرفضای کرلیف را به طور قابل ملاحظه‌ای برای حصول به جواب کاهش دهد. بنابراین زمان محاسبات و هم‌چنین فضای لازم برای ذخیره‌سازی کاهش می‌یابد.

در این مطالعه، روش کم‌ترین باقی‌مانده تعمیم‌یافته^۲ (GMRES) [۱۸] به عنوان روش کرلیف برای حل معادلات جریان دوفازی تک‌بعدی با استفاده از مدل شار رانشی در یک کانال عمودی اعمال شده است. هم‌چنین از حل نیمه‌ضمنی برای پیش‌شرط‌سازی روش GMRES استفاده شده است. روش پیشنهادی به عنوان پیش‌شرط‌ساز براساس حل نیمه‌ضمنی است. در بخش ۲ توصیف مختصری از مدل شار رانشی به همراه معادلات همبستگی ارائه می‌شود. در بخش ۳، روش JFNK و هم‌چنین اعمال پیش‌شرط‌ساز به این روش به تفصیل بیان خواهد شد. در بخش ۴ نتایج حاصل از روش عددی حاضر با داده‌های آزمایشگاهی و هم‌چنین خروجی حاصل از کد RELAP5 و نتایج حاصل از مدل‌سازی مسئله با روش کلاسیک نیمه‌ضمنی [۵] مقایسه شده‌اند. سرانجام در بخش ۵، نتیجه‌گیری ارائه شده است.

2. GMRES: Generalized minimal residual method

1. Iterative methods



۲. توصیف مدل فیزیکی

۱.۲ مدل شار رانشی

روابط اصلی در مدل دو سیالی معادله جرم، انرژی و تکانه برای هر فاز است. این معادلات در RELAP5 ارائه شده‌اند. به دلیل پیچیدگی‌های ذاتی مسئله، اعمال مدل دو سیالی برای مدل سازی ترموهیدرولیک راکتورهای هسته‌ای بسیار مشکل است. پیچیدگی اعمال مدل دو سیالی به یک سیستم پیچیده را می‌توان به طور قابل ملاحظه‌ای با اعمال مدل شار رانشی برای مدل سازی جریان دوفازی، کاهش داد. در مدل شار رانشی معادله تکانه مخلوط برای توصیف حرکت سیال استفاده شده و حرکت نسبی فازها با روابط سینماتیک تعریف می‌شود. از آنجا که مفاهیم پایه‌ای مدل شار رانشی برای جریان دوفازی به تفصیل در مرجع [۲] گزارش شده‌اند، از تکرار آن در این جا صرف نظر شده است.

معادلات پایستگی حاکم در مدل شار رانشی از معادله جرم، تکانه و انرژی مخلوط و معادله پیوستگی فاز پراکنده تشکیل شده است که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۹،۲]:

معادله پیوستگی جرم مخلوط:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m v_m)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

معادله پیوستگی فاز پراکنده:

$$\frac{\partial (\alpha \rho_g)}{\partial t} + \frac{\partial (\alpha \rho_g v_m)}{\partial z} = \Gamma_g - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha \rho_g \rho_f}{\rho_m} \overline{V_{gi}} \right) \quad (2)$$

معادله تکانه مخلوط:

$$\rho_m \frac{\partial v_m}{\partial t} + \rho_m v_m \frac{\partial v_m}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\partial z} - \rho_m g_z - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\alpha \rho_g \rho_f}{(1-\alpha) \rho_m} \overline{V_{gi}}^2 \right] - \frac{f_m}{2D} \frac{G_m^2}{\rho_m} \quad (3)$$

معادله انرژی مخلوط:

$$\frac{\partial (\rho_m h_m)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_m h_m v_m)}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\alpha \rho_g \rho_f}{\rho_m} \Delta h_{gf} \overline{V_{gi}} \right] + \frac{\dot{q}'' \xi_h}{A} + \frac{\partial P}{\partial t} + \left[v_m + \frac{\alpha (\rho_f - \rho_g)}{\rho_m} \overline{V_{gi}} \right] \frac{\partial P}{\partial z} \quad (4)$$

در این روابط، اندیس‌های f ، m و g به ترتیب بیانگر فاز مخلوط، مایع و گاز هستند. $\overline{V_{gi}}$ میانگین سرعت دریافت فاز بخار است. در مطالعه حاضر، معادله تکانه مخلوط در شکل ناپایستار خود استفاده شده است. دلیل این امر کوچک بودن خطای تولید شده و همچنین پیاده‌سازی عددی راحت تر آن است [۴].

برای بستن سیستم معادلات، علاوه بر معادلات فوق به یک معادله حالت برای محاسبه خواص حرارتی مخلوط دو فاز و همچنین به روابط همبستگی به منظور فراهم کردن اطلاعات ضرایب اصطکاک، نسبت لغزش، روابط کیفیت-کسر بخار و ... نیاز داریم. ایشی و هیبیک [۱۹،۲] مطالعات گسترده‌ای در زمینه مدل شار رانشی انجام داده و بسیاری از این روابط را فراهم نموده‌اند. در این پژوهش فرض شده است که دمای بخار ثابت و برابر با دمای اشباع است؛ در حالی که دمای مایع متغیر بوده به طوری که می‌توان خصوصیات حرارتی مایع و بخار آب را از جدول‌های مربوطه [۲۰] بر حسب فشار و آنتالپی تعیین کرد. برای محاسبه سرعت دریافت از مدل چکسال-لولوچ [۲۱] استفاده می‌شود. در مدل چکسال-لولوچ نیازی به دانستن رژیم جریان نبوده و بازه وسیعی از شار جرمی، فشار و اندازه کانال را شامل می‌شود. سرعت دریافت با رابطه زیر داده می‌شود:

$$\overline{V_{gi}} = 1.41 \left(\frac{\Delta \rho g_z \sigma}{\rho_l^2} \right)^{1/4} C_1 C_2 C_3 C_4 \quad (5)$$

در این رابطه ثابت‌های C_1 ، C_2 ، C_3 ، C_4 و C_5 توسط مدل چکسال لولوچ تعریف می‌شوند. جمله تولید بخار در طرف راست رابطه ۲، معادله پیوستگی فاز پراکنده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\Gamma_g = \Gamma_w + \Gamma_{ig} \quad (6)$$

که Γ_g شامل دو بخش است: بخش نزدیک به دیوار و بخش بالک یا توده. در ناحیه نزدیک به دیوار Γ_w ، آهنگ تولید بخار حجمی از مدل لاهی محاسبه می‌شود [۲۲]. آهنگ تولید بخار حجمی در ناحیه بالک سیال به صورت زیر مدل می‌شود:

$$\Gamma_{ig} = \frac{H_{il} (T_l - T_{sat})}{h_{fg}} \quad (7)$$



تکرار کرلیف نیاز است که این امر تأثیر زیادی در بهبود اقتصاد محاسبات دارد. به‌منظور بهبود کارایی و آهنگ همگرایی روش حل، می‌توان به‌جای حل سیستم معادلات خطی ۹، سیستم معادلات خطی با پیش‌شرط‌ساز راست را حل کرد. استفاده از پیش‌شرط‌ساز راست را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$J^k P^{-1} P \delta x^k = -F(x^k) \quad (10)$$

که در آن P ماتریس پیش‌شرط‌ساز است. در واقع P^{-1} تقریب ماتریس J^{-1} می‌باشد. در این مقاله، P ماتریس پیش‌شرط‌سازی است که در بخش بعد تعریف و محاسبه می‌شود. ماتریس جدید به‌صورت زیر خواهد بود:

$$J' \delta x^k = -F(x^k) \quad (11)$$

که

$$J' = JP^{-1} \quad (12)$$

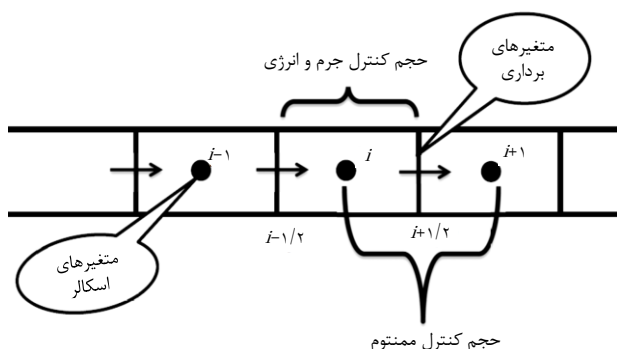
و

$$\delta x' = P \delta x \quad (13)$$

سرانجام، بردار δx^k در یک فرایند تکرار از روش GMRES به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\delta x^k = P^{-1} \delta x'^k \quad (14)$$

در این مقاله از روش‌های PBP برای پیش‌شرط‌سازی حل گر با روش کرلیف یعنی GMRES استفاده شده است. حال در این قسمت، نحوه ساخت ماتریس پیش‌شرط‌ساز P به تفصیل بیان می‌شود.



شکل ۱. آرایش حجم کنترل‌ها برای شبکه جابه‌جا شده.

در مدل‌سازی حاضر نقشه جریان RELAP5 [۶] برای کانال عمودی جوشان برای به‌دست آوردن انتقال جرم و حرارت در فصل مشترک استفاده می‌شود. هم‌چنین برای محاسبه خصوصیات مایع/بخار از IAPWS استفاده شده است [۲۰].

۳. روش حل عددی

در این بخش روش محاسباتی پیاده‌سازی شده در این پژوهش به اختصار بحث می‌شود. روش حجم محدود برای جداسازی فضایی معادلات حاکم بر روی شبکه جابه‌جا شده اعمال شده است. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، برای پیکربندی شبکه جابه‌جا شده، متغیرهای اسکالر شامل فشار، دما و کسر بخار در مرکز سلول تعریف و محاسبه می‌شوند. در حالی که متغیرهای برداری شامل سرعت مخلوط و سرعت فازها بر روی رخ سلول‌ها تعریف و محاسبه می‌شوند. برای محاسبه عبارت‌های مربوط به جابه‌جایی از روش مرتبه اول بالادست استفاده شده است. برای جداسازی فضایی از روش بالادست مرتبه اول و برای جداسازی زمانی، از روش اویلر پسرو کاملاً ضمنی استفاده شده است.

برای حل معادلات غیرخطی جداسازی شده جریان دوفازی در یک کانال جوشان عمودی از روش JFNK استفاده شده است. این روش در بسیاری از زمینه‌های دیگر هم مورد استفاده قرار گرفته است [۹]. برای حل سیستم معادلات غیرخطی به شکل زیر از روش نیوتن استفاده شده است [۱۸، ۹]:

$$F(x) = 0. \quad (8)$$

در این رابطه، F باقی‌مانده غیرخطی و $x = [p, v_m, h_m, \alpha]^T$ است. برای حل این معادله به روش نیوتن لازم است در هر گام مجموعه‌ای از معادلات خطی تصحیحی به فرم زیر حل شوند:

$$J^k \delta x^k = -F(x^k) \quad (9)$$

که J ماتریس ژاکوبین، k اندیس تکرار نیوتن و δx^k بردار تصحیح است. معادله خطی ۹ به‌طور تقریب با استفاده از روش تکرار کرلیف GMRES [۲۳] حل می‌شود. انتظار می‌رود که با استفاده از یک پیش‌شرط‌ساز، همگرایی الگوریتم GMRES سریع‌تر باشد. بنابراین برای رسیدن به جواب، به تعداد کم‌تری



۱.۳ ماتریس پیش شرطساز

در این مطالعه، لازمه استفاده از PBP نوشتن معادلات روش نیمه‌ضمنی سازگار با رابطه ۱۵ است [۱۶]. دلتا فرم روش نیمه‌ضمنی به‌صورت زیر است:

$$P\delta X = -F(X) \quad (17)$$

با استفاده از اعمال روش نیمه‌ضمنی روی یک شبکه جابه‌جا شده جداسازی معادلات حاکم استفاده شده در پیش‌شرطساز نیمه‌ضمنی را می‌توان به‌صورت زیر (معادلات ۱۸ تا ۲۱) ارایه کرد:

معادله خطی حاصل از روش نیوتن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J\delta X = -F(X) \quad (15)$$

معمولاً جداسازی خطی معادلات حاکم برای روش نیمه‌ضمنی روی یک شبکه جابه‌جا شده را می‌توان به فرم ماتریسی زیر نشان داد:

$$PX=b \quad (16)$$

$$F_{v_{m,i+\frac{1}{\nu}}} = \rho_{m,i+\frac{1}{\nu}}^n \frac{v_{m,i+\frac{1}{\nu}}^{n+1} - v_{m,i+\frac{1}{\nu}}^n}{\Delta t} \Delta z + \rho_{m,i+\frac{1}{\nu}}^n v_{m,i+\frac{1}{\nu}}^n [v_{m,i+\frac{1}{\nu}}^n - v_{m,i}^n] + (P_{i+\frac{1}{\nu}}^{n+1} - P_i^{n+1}) + \left(\frac{f_m \Delta z}{2D} \rho_m v_m |v_m| \right)_{i+\frac{1}{\nu}}^n \\ + \rho_{m,i+\frac{1}{\nu}}^n g_z \Delta z + \left\{ \left(\frac{\alpha \rho_g \rho_f}{(1-\alpha) \rho_m} \overline{V_{gi}} \right)_{i+\frac{1}{\nu}}^n - \left(\frac{\alpha \rho_g \rho_f}{(1-\alpha) \rho_m} \overline{V_{gi}} \right)_{i-\frac{1}{\nu}}^n \right\} \quad (18)$$

$$F_{\rho_{m,i}} = \frac{\rho_{m,i} - \rho_{m,i}^n}{\Delta t} + \left(\frac{\rho_m B}{\Delta z} \right)_{i-\frac{1}{\nu}}^n P_{i-\frac{1}{\nu}}^{n+1} - \left[\left(\frac{\rho_m B}{\Delta z} \right)_{i-\frac{1}{\nu}}^n + \left(\frac{\rho_m B}{\Delta z} \right)_{i+\frac{1}{\nu}}^n \right] P_i^{n+1} \\ + \left(\frac{\rho_m B}{\Delta z} \right)_{i+\frac{1}{\nu}}^n P_{i+\frac{1}{\nu}}^{n+1} + \left(\frac{\rho_m B}{\Delta z} \right)_{i+\frac{1}{\nu}}^n - \left(\frac{\rho_m B}{\Delta z} \right)_{i-\frac{1}{\nu}}^n \quad (19)$$

$$\left[h_{m,i}^n \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial P} \right)_i^n - 1 \right] \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} + \left[\rho_{m,i}^n + h_{m,i}^n \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial h_m} \right)_i^n \right] \frac{h_{m,i}^{n+1} - h_{m,i}^n}{\Delta t} \\ + \frac{(\rho_m h_m)_{i+\frac{1}{\nu}}^n v_{m,i+\frac{1}{\nu}}^{n+1} - (\rho_m h_m)_{i-\frac{1}{\nu}}^n v_{m,i-\frac{1}{\nu}}^{n+1}}{\Delta z} + \left[\frac{\alpha \rho_g \rho_f}{\Delta z \rho_m} \Delta h_{gf} \overline{V_{gi}} \right]_{i+\frac{1}{\nu}}^n - \left[\frac{\alpha \rho_g \rho_f}{\Delta z \rho_m} \Delta h_{gf} \overline{V_{gi}} \right]_{i-\frac{1}{\nu}}^n \\ - \frac{1}{\Delta z} \left[v_m + \frac{\alpha(\rho_f - \rho_g)}{\rho_m} \overline{V_{gi}} \right]_i^n \left(P_{i+\frac{1}{\nu}}^{n+1} - P_{i-\frac{1}{\nu}}^{n+1} \right) - \left(\frac{\xi_h}{A} \right) q_w^* = 0 \quad (20)$$

$$F_{\alpha,i} = \frac{\alpha_i^{n+1} - \alpha_i^n}{\Delta t} \Delta z + \left(\frac{\alpha}{\rho_g} \left(\frac{\partial \rho_v}{\partial P} \right) \right)_i^n \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \Delta z + \left(\frac{1}{\rho_g} \right)_i^n \left[(\alpha \rho_g)_{i+\frac{1}{\nu}}^n v_{m,i+\frac{1}{\nu}}^{n+1} - (\alpha \rho_g)_{i-\frac{1}{\nu}}^n v_{m,i-\frac{1}{\nu}}^{n+1} \right] \\ + \left[\frac{\alpha \rho_f}{\rho_m} \overline{V_{gi}} \right]_{i+\frac{1}{\nu}}^n - \left[\frac{\alpha \rho_f}{\rho_m} \overline{V_{gi}} \right]_{i-\frac{1}{\nu}}^n - \frac{\Gamma}{\rho_g} \Delta z \quad (21)$$



$$B_{i+\frac{1}{2}}^n = -\frac{\Delta t}{\Delta z \rho_{m,i+\frac{1}{2}}^n} \quad (24)$$

برای اینکه بتوان روابط ۱۸ تا ۲۱ را مشابه با معادلات ۱۷ نوشت، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\delta v_{m,i+\frac{1}{2}}^* = v_{m,i+\frac{1}{2}}^n - v_{m,i+\frac{1}{2}}^* \quad (25)$$

$$\delta P_i^* = P_i^n - P_i^* \quad (26)$$

$$\delta \alpha_i^* = \alpha_i^n - \alpha_i^* \quad (27)$$

$$\delta h_{m,i}^* = h_{m,i}^n - h_{m,i}^* \quad (28)$$

که Δt اندازه گام زمانی و بالانویس‌های n و $n+1$ به ترتیب نشانگر گام زمانی قدیم و جدید هستند. این معادلات بعد از جای گذاری معادله تصحیح سرعت ۲۲ و استفاده از ترکیب خطی معادله جرم-انرژی به دست می‌آیند:

$$v_{m,i+\frac{1}{2}}^{n+1} = A_{i+\frac{1}{2}}^n + B_{i+\frac{1}{2}}^n (P_{i+1}^{n+1} - P_i^{n+1}) \quad (22)$$

که

$$A_{i+\frac{1}{2}}^n = v_{m,i+\frac{1}{2}}^n - \frac{\Delta t}{\Delta z \rho_{m,i+\frac{1}{2}}^n} \left[\rho_{m,i+\frac{1}{2}}^n v_{m,i+\frac{1}{2}}^n \left[v_{m,i+1}^n - v_{m,i}^n \right] + \left(\frac{f_m \Delta z}{2D} \rho_m v_m |v_m| \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \right] + \rho_{m,i+\frac{1}{2}}^n g_z \Delta z + \left\{ \left(\frac{\alpha \rho_g \rho_f}{(1-\alpha) \rho_m} \bar{V}_{gi} \right)_{i+1}^n - \left(\frac{\alpha \rho_g \rho_f}{(1-\alpha) \rho_m} \bar{V}_{gi} \right)_{i-1}^n \right\} \quad (23)$$

$$\rho_{m,i+\frac{1}{2}}^n \frac{\Delta z}{\Delta t} \delta v_{m,i+\frac{1}{2}}^* + (\delta P_{i+1}^* - \delta P_i^*) = -F_{v_{m,i+\frac{1}{2}}}^* \quad (29)$$

$$\left(\frac{\rho_m B}{\Delta z} \right)_{i-\frac{1}{2}} \delta P_{i-1}^* - \left[\left(\frac{\rho_m B}{\Delta z} \right)_{i-\frac{1}{2}} + \left(\frac{\rho_m B}{\Delta z} \right)_{i+\frac{1}{2}} \right] \delta P_i^* + \left(\frac{\rho_m B}{\Delta z} \right)_{i+\frac{1}{2}} \delta P_{i+1}^* = -F_{\rho,i}^* \quad (30)$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left[h_{m,i}^n \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial P} \right)_i^n - 1 \right] \delta P_i^* + \frac{1}{\Delta t} \left[\rho_{m,i}^n + h_{m,i}^n \left(\frac{\partial \rho_m}{\partial h_m} \right)_i^n \right] \delta h_{m,i}^* + \frac{1}{\Delta z} (\rho_m h_m)_{i+\frac{1}{2}}^n \delta v_{m,i+\frac{1}{2}}^* - \frac{1}{\Delta z} (\rho_m h_m)_{i-\frac{1}{2}}^n \delta v_{m,i-\frac{1}{2}}^* - \frac{1}{\Delta z} \left[v_m + \frac{\alpha(\rho_f - \rho_g)}{\rho_m} \bar{V}_{gi} \right]_i^n (\delta P_i^* - \delta P_{i-1}^*) = -F_{h_{m,i}}^* \quad (31)$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} \delta \alpha_i^* + \left(\frac{\alpha}{\rho_g} \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial P} \right) \right)_i \frac{\Delta z}{\Delta t} \delta P_i^* + \left(\frac{1}{\rho_g} \right)_i (\alpha \rho_g)_{i+\frac{1}{2}} \delta v_{m,i+\frac{1}{2}}^* - \left(\frac{1}{\rho_g} \right)_i (\alpha \rho_g)_{i-\frac{1}{2}} \delta v_{m,i-\frac{1}{2}}^* = -F_{\alpha,i}^* \quad (32)$$

رابطه ۳۳ با رابطه ۱۵ سازگار است. همان‌طور که پیش از این اشاره شد، ضرایب ماتریس P تقریبی از ماتریس ژاکوبین هستند. بنابراین می‌توان از ماتریس P به عنوان پیش‌شرط‌ساز ماتریس ژاکوبین رابطه ۱۵ استفاده کرد [۹]. روابط ۲۹ تا ۳۲ را می‌توان با روش حل عددی نیمه‌ضمنی [۳، ۵] حل کرد و سپس از این حل به عنوان پیش‌شرط‌ساز و هم‌چنین حدس اولیه تکرارهای روش نیوتن کرلیف استفاده نمود. لازم به یادآوری است که رابطه ۳۳ در هر گام زمانی تنها یکبار محاسبه می‌شود.

با جای‌گذاری روابط ۲۵ تا ۲۸ در روابط ۱۸ تا ۲۱ خواهیم داشت:

که بالانویس * نشانگر حل جاری معادلات خطی است. به دلیل اینکه از شکل دلتای معادلات پیش‌شرط‌سازی نیمه‌ضمنی استفاده شد، بنابراین می‌توان معادلات ۳۴ تا ۳۷ را به صورت برداری به شکل زیر نشان داد:

$$P \delta \chi^* = -F^* = - \left(F_{\rho_{m,i}}^*, F_{v_{m,i+\frac{1}{2}}}^*, F_{h_{m,i}}^*, F_{\alpha,i}^* \right)^T \quad (33)$$



های تجربی را در مورد توزیع کسر بخار در امتداد طول لوله ارایه می‌دهند. در این نمودار توزیع کسر بخار در مقابل کیفیت تعادلی نقطه‌ای رسم شده است. همچنین در گزارش بارتولومی، عدم قطعیت داده‌های کسربخار اندازه‌گیری شده نیز مورد بحث قرار گرفته است. بیشینه خطای مطلق اندازه‌گیری‌های کسری بخار از ۰/۰۴ تجاوز نمی‌کند.

در این مطالعه نتایج عددی برای $N_{cell}=20$ و $\Delta t=0.01s$ به‌دست آمده‌اند. همچنین، نتایج عددی به‌دست آمده با کد قابل‌اعتماد RELAP5، که در صنعت به‌طور گسترده‌ای برای طراحی و تحلیل ایمنی راکتورهای هسته‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد، مقایسه شده است. به‌طور کلی توافق کیفی نسبتاً خوب و قابل‌قبولی بین نتایج عددی، نتایج کد RELAP5 و داده‌های تجربی وجود دارد. همچنین، تغییرات فشار در طول کانال برای حالت‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. از آنجا که نتایج آزمایش‌های بارتولومی فاقد اطلاعاتی در مورد فشار است، بنابراین نتایج حاصل از مدل حاضر با نتایج حاصل از کد RELAP5 مقایسه شده است. خطای جذر میانگین مربعات^۲ (RMSE) نسبت به نتایج حاصل از کد RELAP5 محاسبه شده و برای محدوده فشار ۱۵ تا ۱۴۷ bar، بیشینه مقدار RMSE، ۰/۰۶۵ می‌باشد.

جدول ۱. شرایط آزمایشگاهی حالت‌های مختلف برای یک کانال عمودی.

شماره	فشار (bar)	شار جرمی (kg/m ² s)	شار حرارتی (MW/m ²)	دمای ورودی (K)	طول (m)	قطر (m)	مرجع
۱	۶۸	۹۹۸	۴۴۰	۵۲۱	۱/۵	۰/۰۱۲	[۲۴]
۲	۱۰۸	۹۶۶	۱۱۳۰	۵۰۲	۱/۵	۰/۰۱۲	[۲۴]
۳	۱۴۷	۲۰۱۴	۱۷۰	۵۴۵	۱/۵	۰/۰۱۲	[۲۴]
۴	۴۵	۹۰۰	۳۸۰	۵۱۳	۲	۰/۰۲۴	[۲۵]
۵	۳۰	۹۰۰	۳۸۰	۴۸۸	۲	۰/۰۲۴	[۲۵]
۶	۱۵	۹۰۰	۳۸۰	۴۵۵	۲	۰/۰۲۴	[۲۵]

جدول ۲. درصد میانگین خطای مطلق کسر بخار (MAPE)

شماره حالت	مقدار MAPE روش حاضر	مقدار MAPE کد RELAP5
۱	۳/۰۴	۱/۶۲
۲	۳/۲۵	۲/۰۴
۳	۰/۹۶	۰/۸۵
۴	۵/۲۴	۴/۳۶
۵	۴/۳۵	۳/۸۱
۶	۷/۳۴	۵/۸۵

2. Root Mean Square Error (RMSE)

در این پژوهش، شرایط مرزی اعمال شده شامل شار جرمی و دمای ورودی و فشار در خروجی است.

۴. ارایه نتایج و بحث

به‌منظور ارزیابی قابلیت مدل ارایه‌شده در این پژوهش، لازم است نتایج شبیه‌سازی اعتبارسنجی شوند. این کار با مقایسه نتایج عددی با داده‌های آزمایشگاهی بارتولومی [۲۴-۲۵] صورت گرفت. آزمایش‌های بارتولومی برای جریان رو به بالا در یک کانال عمودی انجام شده است. این آزمایش‌ها گستره وسیعی از شرایط کاری (فشار، دبی جرمی، شار حرارتی و درجه زیر سرد) را شامل می‌شوند. برخی از شرایط آزمایشگاهی داده‌های تجربی بارتولومی در جدول ۱ گزارش شده‌اند. آزمایش‌های بارتولومی [۲۴] با استفاده از لوله‌های عمودی با قطر داخلی ۱۲ mm، ضخامت دیواره ۲ mm و طول ۱/۵ m انجام شده‌اند. برای ارزیابی خطای بین نتایج عددی و داده‌های آزمایشگاهی، درصد میانگین خطای مطلق^۱ (یا MAPE) محاسبه می‌شود. MAPE کسر بخار از رابطه زیر قابل محاسبه است:

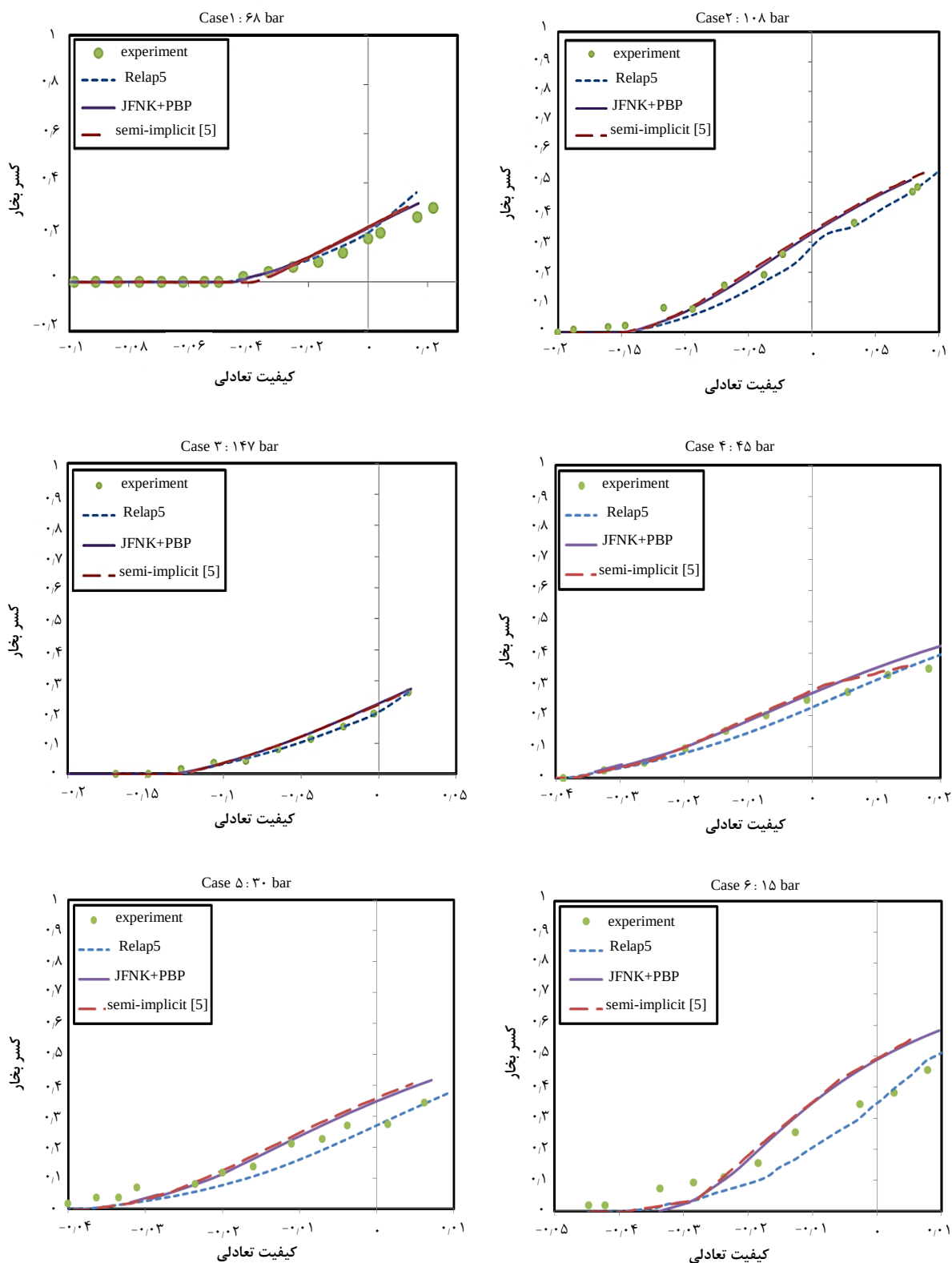
$$\varepsilon_{\alpha} = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N |\alpha_{Num,i} - \alpha_{exp,i}| \quad (34)$$

در رابطه فوق، اندیس‌های Num و exp به‌ترتیب بیان‌گر نتایج عددی و داده‌های آزمایشگاهی و N تعداد کل داده‌ها در ناحیه دوفازی آزمایش است. همچنین در صورت لزوم از درون‌یابی داده‌ها استفاده شده است. درصد میانگین خطای مطلق (MAPE) کسر بخار برای حالت‌های مختلف آزمایشگاهی در جدول ۲ گزارش شده است. این جدول نشان می‌دهد که برای نتایج حاصل از مدل ارایه شده، مقادیر MAPE کم‌تر از ۷/۳۴٪ می‌باشند.

یک روش قابل قبول برای اعتبارسنجی یک روش محاسباتی جدید، مقایسه نتایج عددی با داده‌های آزمایشگاهی است. با این کار می‌توان با اعتماد بیش‌تری یافته‌های جدید را برای کاربردهای عملی مورد استفاده قرار داد. بنابراین در شکل ۲ برای حالت‌های ۱ تا ۶ تغییرات کسربخار نسبت به کیفیت تعادلی در امتداد یک کانال نشان داده شده است. لازم به یاد آوری است که نتایج آزمایش‌های بارتولومی تنها اندازه‌گیری

1. Mean Absolute Percentage Error (MAPE)





شکل ۲. مقایسه نتایج عددی و نتایج حاصل از کد RELAP5 با داده‌های تجربی برای فشارهای مختلف.

دهد که روش JFNK با پیش‌شرط‌ساز نیمه‌ضمنی ارایه شده در این مقاله (JFNK+PBP) نسبت به روش JFNK بدون پیش‌شرط‌ساز، زمان CPU کم‌تری دارد. از این مسئله می‌توان

مزایای استفاده از پیش‌شرط‌ساز برای کاهش میانگین تعداد تکرارها در هر گام زمانی و زمان CPU کم‌تر برای حل معادلات غیرخطی در جدول ۳ گزارش شده است. این جدول نشان می‌دهد



فشار، نتایج تا حدودی به دلیل محدودیت‌های روابط تجربی در روش شار رانشی، اختلاف دارند. ارزیابی نتایج حاصل نشان می‌دهند که این روش قادر است نتایج سریع، دقیق و قابل اطمینان را برای بسیاری از کاربردهای عملی جریان دو فاز ارائه دهد.

مراجع

1. J. C. Collier, *Convective Boiling and Condensation*, oxford engineering science series (1994).
2. M. Ishii, T. Hibiki, *Thermo-Fluid Dynamics of Two-Phase Flow*, Springer (2006).
3. D. Liles, W. H. Reed, A Semi-implicit Method for Two phase Fluid Dynamics, *J. Comput. Phys.*, **26**, 390-407 (1978).
4. Y. G. Lee, G. C. Park, TAPINS: a thermal-hydraulic system code for transient analysis of a fully-passive integral PWR, *Nucl. Eng. Technol.* **45**, 172-185 (2013).
5. S. Talebi, H. Kazeminejad, H. Davilu, A numerical technique for analysis of transient two-phase flow in a vertical tube using the drift flux model, *Nucl. Eng. Des.* **242**, 316-322 (2012).
6. RELAP5 Code Development Team, *RELAP/MOD3 Code manual*, Idaho national engineering and environmental laboratory, vol. 1-6. Idaho 83415 (2001).
7. RETRAN-3D – A Program for Transient Thermal-Hydraulic Analysis of Complex Fluid Flow Systems: Volume 1: Theory and Numerics (Revision 3), NP-7450-V1R3, Electric Power Research Institute, October, (1998).
8. C. H. Frepoli, J. Mahaffy, K. Ohkawa, Notes on the implementation of a fully implicit numerical scheme for a two-phase three-field flow model, *Nucl. Eng. Des.* **225** (2003) 191-217.
9. D. A. Knoll, D. E. Keyes, *Jacobian-free Newton-Krylov methods: a survey of approaches and applications*, *J. Comput. Phys.* **193** (2004) 357-397.
10. A. Segal, M. Rehman, C. Vuik, Review article: preconditioners for incompressible navier-stokes solvers, *Numer. Math. Theory, Methods Appl.* **3** (2010) 245-275.
11. H. Elman, et al., Block preconditioners based on approximate commutators, *SIAM J. Sci. Comput.* **27** (2006) 1651-1668.
12. A. Hajizadeh, H. Kazeminejad, S. Talebi, A new numerical method for solution of boiling flow using combination of SIMPLE and Jacobian-free Newton-Krylov algorithms, *Progr. Nucl. Energy*, **95** (2017) 48-60.
13. L. Zou, H. Zhao, H. Zhang, Numerical implementation, verification and validation of two-phase flow four-equation drift flux model with Jacobian free Newton-Krylov method, *Ann. Nucl. Energy* **87** (2015) 707-719.

Jacobian free Newton-Krylov method, *Ann. Nucl. Energy* **87** (2015) 707-719.

نتیجه گرفت که JFNK+PBP نسبت به JFNK آهنگ همگرایی بیشتری دارد. جدول ۳ نشان می‌دهد که سرعت همگرایی روش JFNK+PBP نسبت به JFNK حداقل به مقدار ۵۰٪ بیشتر است.

جدول ۳. تعداد تکرارها و زمان CPU برای حالت‌های مختلف با و بدون استفاده از پیش‌شرط‌ساز.

شماره حالت	روش	تعداد تکرارها	CPU (s)	درصد اختلاف نسبی CPU
۱	JFNK	۱۲	۰٫۶۸۳۵	-
	JFNK + PBP	۵	۰٫۳۴۱۵	۵۱
۲	JFNK	۸	۰٫۵۳۱۲	-
	JFNK + PBP	۳	۰٫۲۲۳۱	۵۸
۳	JFNK	۱۰	۰٫۷۵۱۷	-
	JFNK + PBP	۳	۰٫۳۵۶۱	۵۲
۴	JFNK	۹	۰٫۵۳۹۲	-
	JFNK + PBP	۵	۰٫۲۳۴۱	۵۶
۵	JFNK	۱۵	۰٫۶۵۲۴	-
	JFNK + PBP	۷	۰٫۳۲۱۲	۵۰
۶	JFNK	۱۷	۰٫۷۹۳۸	-
	JFNK + PBP	۸	۰٫۳۷۱۲	-

۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله، روش نیوتن کرلیف مستقل از ژاکوبین با پیش‌شرط‌ساز PBP نیمه‌ضمنی برای حل مسئله جریان دو فاز تک‌بعدی در یک کانال عمودی ارائه شده و با مقایسه نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی و هم‌چنین خروجی کد RELAP5، مدل حاضر اعتبارسنجی شده و توافق خوبی به دست آمده است. مقایسه نتایج نشان داد که آهنگ همگرایی روش JFNK با پیش‌شرط‌ساز فیزیکی نیمه‌ضمنی حداقل ۵۰٪ سریع‌تر است. این روش هم‌چنین دارای زمان CPU کم‌تری بوده و با تعداد تکرارهای کم‌تری به جواب قابل‌قبولی می‌رسد. مطالعات اعتبارسنجی نشان داد که نتایج حاصل شده توسط روش حاضر قادر به پیش‌بینی کسریخار با میانگین خطای مطلق کم‌تر از ۷٫۳۴٪ است. مقایسه نتایج محاسباتی با کد RELAP5 و هم‌چنین نتایج تجربی، توافق خوبی بین نمونه‌های بررسی شده را نشان می‌دهد. با این حال در محدوده کم

14. V. A. Mousseau, *Implicitly balanced solution of the two-phase flow equations coupled to nonlinear*



- heat conduction, *J. Comp. Phys.* **200** (2004) 104–132.
15. H. Elman, et al., A taxonomy and comparison of parallel block multi-level preconditioners for the incompressible Navier Stokes equations, *J. Comput. Phys.* **227** (2008) 1790-1808.
 16. J. Reisner, et al., An efficient physics-based preconditioner for the fully implicit solution of small-scale thermally driven atmospheric flows, *J. Comput. Phys.* **189** (2003) 30–44.
 17. L. Hu, et al., JFNK method with a physics-based preconditioner for the fully implicit solution of one-dimensional drift-flux model in boiling two-phase flow, *App. Therm. Eng.* **116** (2017) 610–622.
 18. Y. Saad, *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, second ed., (2003).
 19. T. Hibiki, M. Ishii, One-dimensional drift-flux model and constitutive equations for relative motion between phases in various two-phase flow regimes, *Int. J. Heat Mass Transf.* **46** (2003) 4935–4948.
 20. W. Wagner, A. Pruss, *The IAPWS formulation 1995 for thermodynamic properties of ordinary water for general and science use*, *J. Phys. Chem. Ref. Data* **31** (2002) 387–535.
 21. B. Chexal, G. Lellouche, A Full-range Drift-flux Correlation for Vertical Flows, *EPRI-NP-3989-SR (Revision 1)*, EPRI (1986).
 22. R. T. Lahey, A Mechanistic Subcooled Boiling Model, *Proc. 6th International Heat Transfer Conference*, **1** (1978) 293-297.
 23. Y. Saad, M. H. Schultz, GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving non-symmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comp.* **7** (1986) 856-569.
 24. G.G. Bartolomei, V. M. Chanturiya, Experimental study of true void fraction when boiling subcooled water in vertical tubes, *Therm. Eng.* **14** (1967) 123–128.
 25. G. G. Bartolomej, et al., An experimental investigation of the true volumetric vapor content with subcooled boiling tubes, *Therm. Eng.* **29** (1982) 132–1.

COPYRIGHTS

©2021 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.

**استناد به این مقاله**

حسن اسمعیلی، حسین کاظمی‌نژاد، حسین خلفی، سید محمد میروکیلی (۱۴۰۰)، شبیه‌سازی جریان دوفازی شار رانشی در یک کانال عمودی با استفاده از روش نیوتن-کریلف، ۹۵، ۱-۱۰

DOI: [10.24200/nst.2021.1179](https://doi.org/10.24200/nst.2021.1179)

Url: https://jonsat.nstri.ir/article_1179.html

