

حل معادلات تصادفی مربوط به جریان الکتریکی و تابش مواد رادیواکتیو با اعمال اختلال نویه سفید

علیرضا خلیلی گلمانخانه^۱، رویا عباس‌زاده^۱، امیر پیشکو^۲

۱. گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ارومیه، صندوق پستی: ۹۶۹، ارومیه-ایران

۲. پژوهشکده فیزیک و شتابگرها، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵-۱۳۳۹، تهران-ایران

*Email: alirezakhalili2002@yahoo.co.in

مقاله‌ی فنی

تاریخ دریافت مقاله: ۹۹/۸/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۱۱/۴

چکیده

علی‌رغم اینکه سیستم‌های فیزیکی بیش‌تر توسط معادله‌های دیفرانسیل معین مدل‌سازی می‌شوند، چون در اغلب موارد از اثرات تصادفی صرف‌نظر شده است، از این‌رو جواب‌ها با نتایج تجربی سازگار نیستند. در این پژوهش، هدف بررسی اثر اختلال تصادفی «نویه سفید» بر روی دو مدل فیزیکی است. در ابتدا متغیرها و فرایندهای تصادفی مربوط شده است. سپس به حل معادله لانگوین، که فرم کلی یک معادله تصادفی با اختلال نویه سفید است، پرداخته شده و دو مدل تصادفی فیزیکی برای جریان الکتریکی و تابش مواد رادیواکتیو گردیده است. این کار با در نظر گرفتن جمله اختالی نویه سفید در معادلات دیفرانسیل معمولی مربوطه انجام می‌شود. با حل این معادلات تصادفی، تابع مقدار میانگین، تابع واریانس و نیز تابع فرایندهای تصادفی به دست خواهد آمد. در نهایت برای مطالعه بیش‌تر نتایج به دست آمده، ضمن انجام شبیه‌سازی، نمودارهای آن‌ها نمایش داده شده‌اند. به‌منظور شبیه‌سازی حرکت تصادفی مورد نظر، از روش مونت‌کارلو در محیط نرم‌افزار Excel استفاده شده است.

کلیدواژه‌ها: فرایند تصادفی، معادله لانگوین، اختلال تصادفی، نویه سفید

Solving Random Equations Related to Electric Current and Radiation of Radioactive Materials with Effect of White Noise Perturbation

A. Khalili Golmankhaneh^{1,*}, R. Abaszade¹, A. Pishkoo²

1. Department of Physics, Urmia Branch, Islamic Azad University, P.O.Box: 969, Urmia, Iran.

2. Physics and Accelerators Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOI, P.O.Box: 14155-1339, Tehran-Iran

Technical Paper

Received 15.11.2020, Accepted 23.1.2021

Abstract

Physical systems are mostly modeled by certain differential equations. However, in most cases random effects are omitted and therefore, the solutions are not in agreement with the experimental results. In the present work, we have investigated the effect of white noise perturbation on two physical models. At first, we have reviewed the random variables and processes and then, we have solved the Langevin equation, which is a general form of a random equation with a random white noise perturbation. We have also proposed a stochastic model for both the electric current and radiation of radioactive materials. This is done by considering the white noise perturbation sentence in the corresponding ordinary differential equations. By solving these random equations, we have obtained the mean value function, the variance function, and the random process function, as well. Finally, the results have been simulated and the corresponding diagrams presented. In order to simulate the desired random movement, the Monte Carlo method in Microsoft Excel environment was used.

Keywords: Stochastic process, Langevin equation, Stochastic perturbation, White noise



در راستای کارهای انجام پذیرفته در این زمینه، در پژوهش حاضر اثر نوفه سفید در مدل‌های فیزیکی مانند مدار الکتریکی و تابش مواد رادیواکتیو بررسی شده است.

نتایج اصلی این کار شامل حل (۱) معادله حاکم بر جریان الکتریکی با اضافه کردن جمله اختلالی نوفه سفید و (۲) حل معادله واپاشی هسته‌ای با این جمله اختلالی است (شکل ۱). برای این کار در ابتدا لازم است تعاریف مورد نیاز اولیه برای کمک به خواننده مرور شود (بخش دوم).

۲. تعاریف اولیه در فرایندهای تصادفی

متغیرهای تصادفی و فرایندهای تصادفی نقش مهمی در توسعه علوم مهندسی و فیزیک آماری داشته است. در این بخش به تعاریف اولیه مورد نیاز در این مقاله اشاره شده است [۱-۷].

فرایندهای تصادفی^۱ : یک فرایندهای تصادفی، مجموعه‌ای از $\{X(\omega, t), \omega \in \Omega, t \in T\}$ متغیرهای تصادفی در فضای احتمال (Ω, F, P) است، که در آن Ω فضای نمونه، F جبر - سیگما و P اندازه احتمال می‌باشد. برای سادگی فرض می‌کنیم:

$$X(\omega, t) = X(t) \quad (1)$$

در اینجا T ، مجموعه شاخص‌ها^۲ نامیده می‌شود. مجموعه مقادیر $X(t)$ فضای وضعیت^۳ یا فضای حالت فرایندهای تصادفی نام دارد.

میانگین^۴ متغیر تصادفی: اگر $X(t)$ یک متغیر تصادفی باشد، میانگین متغیر تصادفی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[X(t)] = \int X(t) \rho x(\omega) d\omega \quad (2)$$

که در آن $\rho x(\omega)$ چگالی احتمال اعضای مجموعه $X(\omega, t) = \text{cons tan } t$ می‌باشد.

معادلات تصادفی = اختلال تصادفی + معادلات معین

قانون دوم نیوتون	حرکت برآونی	بخش 2
معادله 7	معادله 4	
معادله حرکت الکترونها در داخل رسانا	معادله لانگوین	بخش 3
معادله 18 = انر نوفه سفید + معادله 17	معادله 9	
معادله 26 = انر نوفه سفید + معادله 25	حل معادلات 26 و 18	نتایج اصلی مقاله 4 و بخش‌های 5 و 6

شکل ۱. معادلات معین و همتأثی تصادفی آن‌ها در تمامی بخش‌های مقاله.

۱. مقدمه

فرایندها و رویدادهای فیزیکی در طبیعت به دو نوع معین و تصادفی تقسیم می‌شوند. نوع معین با توجه به شرایط اولیه مسئله به کمک معادله دیفرانسیل معمولی و یا جزئی فرمول‌بندی می‌شود. فرایندهای تصادفی نوع دیگری از رویدادها در طبیعت می‌باشند که به کمک متغیرها و معادلات تصادفی مدل‌سازی و توصیف می‌شوند و نقش مهمی در پیشرفت علوم و مهندسی دارند. فرایندهای تصادفی مدلی ریاضی برای بسیاری از آزمایش‌های تجربی است که نتایج آن‌ها دقیقاً مشخص نیستند. فرایندهای تصادفی نقش مهمی در توسعه مکانیک آماری تعادلی و غیر تعادلی دارد. فرایند برنولی، که از نوع تصادفی است، می‌تواند یک آزمایش تکرارشونده که تنها دو نتیجه مستقل دارد را مدل‌سازی نماید. به عنوان مثال، قدم زدن تصادفی یک بعدی نمونه‌ای از این فرایند است. خاصیت مارکوف نقش مهمی در تقسیم‌بندی فرایندهای تصادفی داشته و نشان از وابستگی آینده هر فرایند تصادفی به گذشته آن دارد. در مقابل آن‌ها فرایندهای حافظه‌دار قرار دارند که آینده این فرایندها بستگی به گذشته‌ای با حافظه طولانی دارد. فرایندهای تصادفی بر اساس فضای نمونه و پارامتر به حالت‌های گستته و پیوسته تقسیم‌بندی می‌شوند [۱-۱۸]. حرکت برآونی با حرکت ذرات و مولکول‌ها در مایعات و گازها توضیح داده می‌شود؛ در حالی که معادله معین مربوطه قانون دوم نیوتون است و معادله تصادفی نظری آن معادله لانگوین می‌باشد. در این حرکت مولکول‌ها با برخورد با یکدیگر در بازه‌های زمانی متفاوت و در عین حال حرکت مستقل آن‌ها از هم به دست می‌آید [۱]. معادله لانگوین که حرکت یک ذره را با در نظر گرفتن قانون دوم نیوتون توصیف می‌کند نقش مهمی در پدیده نفوذ مولکول‌ها در حالت‌های مختلف ماده دارد [۱۲]. به تازگی حساب فرکتال‌ها جهت مدل‌سازی قدم زدن تصادفی بر روی فرکتال‌ها به کار برده شده است و رابطه میانگین و واریانس قدم زدن تصادفی با معادله نفوذ مقایسه شده است. مدل‌سازی که حساب فرکتال انجام می‌دهد قابل مقایسه با مدل‌سازی‌های انجام شده توسط معادلات تصادفی است [۱۹-۲۰].

در سال‌های اخیر فرایندهای فیزیکی با وجود اختلال تصادفی، به دلیل کاربرد زیاد آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است [۲۱]. اثر نوفه‌های سفید پواسونی و گاووسی بر مدل انتشار ویروس ایدز نشان می‌دهد نوفه سفید پواسونی در مقایسه با نوفه گاووسی دارای خطای کمتری است [۱۰].

با اعمال جمله نوفه سفید در مدل رشد جلبک‌ها که منجر به یک معادله دیفرانسیل تصادفی می‌شود، می‌توان معادله مربوطه را به وسیله روش اویلر- ماریا حل کرد [۱۱].

1. Random processes
2. Index set
3. State space
4. Mean



$$X(t + dt) - X(t) = F(X(t), dt) \quad (7)$$

که در آن تابع انتشار F ^{۱۱} به صورت زیر است:

$$F[X(t), dt] = \sqrt{\delta^r dt} N_t^{t+dt} \quad (8)$$

در این رابطه، δ^r پارامتر مشخصه فرایند^{۱۲} تصادفی نویه سفید گاووسی می‌باشد و در معادله (8) ، N_t^{t+dt} ، یک توزیع نرمال^{۱۳} با میانگین صفر و واریانس یک در بازه $(t, t + dt)$ است. با فرض اینکه مقدار $X(t)$ در زمان t برابر $x(t)$ باشد، از این روابطه ۱ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$X(t + dt) = N(x(t), \delta^r dt) \quad (9)$$

با توجه به حساب ایتو^{۱۴} از رابطه زیر استفاده می‌شود [۱۲]:

(10)

$$X(t + dt) - X(t) = \left[X(t + dt) - X(t + \frac{dt}{2}) \right] + \left[X(t + \frac{dt}{2}) - X(t) \right]$$

به کمک روابطه ۱۰، می‌توان رابطه ۸ را به صورت زیر تبدیل کرد [۱۲]:

$$\sqrt{\delta^r dt} N_t^{t+dt} \quad (11)$$

$$\sqrt{\delta^r \left(\frac{dt}{2} \right)} N_{t+\frac{dt}{2}}^{t+dt} + \sqrt{\delta^r \left(\frac{dt}{2} \right)} N_t^{t+\frac{dt}{2}}$$

این معادله را خودسازگار^{۱۵} می‌نامند. این شرط وقته برقرار است

که (11) و (12) مستقل از هم باشند. اکنون

می‌توان معادله حرکت مربوط به ذرات را، که حرکت براوونی در یک بعد دارند، به صورت زیر نوشت و در ادامه آن را حل کرد:

$$X(t + dt) - X(t) = \sqrt{\delta^r dt} N_t^{t+dt} \quad (12)$$

این معادله حرکت پیوسته براوونی است که در راستای محور X انفاق می‌افتد. اگر در رابطه ۱۲ فرض کنیم $t=0$ باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

- 11. Markov propagator function
- 12. Process-characterizing parameter
- 13. Unit normal distribution
- 14. Ito calculus
- 15. Self-consistency

واریانس^۱ فرایند تصادفی: اگر $X(t)$ یک فرایند تصادفی باشد، واریانس آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{var}_X(t) = (E[(X(t) - E[X])])^2 \quad (3)$$

نمود فرایند تصادفی^۲: اگر $\{X(t), t \geq 0\}$ یک فرایند تصادفی پیوسته باشد. تفاضل $\{X(s) - X(t)\}$ در فاصله زمانی (s, t) را نمو آن فرایند می‌گویند.

فرایند تصادفی مانا^۳: فرایند تصادفی $X(t)$ دارای توزیع نموی که فقط بستگی به تفاضل $(t-s)$ باشد $(s < t)$ را مانا گویند.

تابع خودهمبستگی^۴: اندازه وابستگی بین فرایند تصادفی $X(t)$ به کمک تابع خود همبستگی، که به صورت زیر تعریف می‌شود، به دست می‌آید:

$$R_X(t, s) = E[X(t)X(s)] \quad (4)$$

تابع اتو کوواریانس^۵: برای هر فرایند تصادفی X اتو کوواریانس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_X(t, s) = R_X(t, s) - E[X(t)X(s)] \quad (5)$$

تابع همبستگی^۶: برای هر فرایند تصادفی $X(t)$ تابع همبستگی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_X(t, s) = E[X(t)X(s)] - E[X(t)]E[X(s)] \quad (6)$$

فرایند واینر^۷: یک فرایند تصادفی پیوسته را واینر $X(t)$ گویند اگر:

۱. $X(\cdot) = 0$ برای حالت $t \geq 0$.

۲. نمو $(s - t) X(s) - X(t)$ دارای توزیع گاووسی^۸ با میانگین صفر است و واریانس آن تابعی از $(t-s)$ باشد.

۳. نمودها مستقل و بدون همپوشانی باشند. حرکت براوونی^۹ مثالی از فرایند واینر است.

معادله فرایند واینر: اگر $X(t)$ یک فرایند تصادفی واینر باشد، از معادله تصادفی^{۱۰} زیر تبعیت می‌کند [۱۴-۱۵]:

- 1. Invariance
- 2. Increments
- 3. Stationary processes
- 4. Auto-correlation function
- 5. Auto-covariance
- 6. Correlation
- 7. Wiener
- 8. Gaussian
- 9. Brownian motion
- 10. Stochastic



$$V(t + dt) - V(t) = -\gamma V(t) dt + \sqrt{\beta^r dt} N_t^{t+dt}(\cdot, 1) \quad (21)$$

رابطه ۲۱ فرایند تصادفی اورنشتاین- اولنبرگ^۲ [۱۸] را توضیح می‌دهد؛ به عبارت دیگر، مدلی تصادفی برای حرکت براونی مولکول‌ها و برخورد آن‌ها با مولکول‌های دیگر می‌باشد. در این مرحله، هدف حل رابطه ۲۱ است. با توجه به این که دنباله متغیرهای تصادفی زیر مستقل از هم هستند، از این‌رو ترکیب خطی آن‌ها نیز توزیع نرمال است، یعنی:

$$V(dt), V(2dt), \dots, V(t) \quad (22)$$

که هر کدام از این متغیرها به ترتیب دارای توزیع احتمالی به صورت زیر هستند:

$$N_{\cdot}^{dt}(\cdot, 1), N_{dt}^{rdt}(\cdot, 1), \dots, N_{t-dt}^t(\cdot, 1) \quad (23)$$

بنابراین $V(t)$ دارای توزیع نرمال به شکل زیر می‌باشد:

$$V(t) = N_{\cdot}^t(\text{mean}\{V(t)\}, \text{var}\{V(t)\}) \quad (24)$$

از این‌رو با توجه به رابطه ۲۲، در این مرحله هدف پیدا کردن میانگین و واریانس $V(t)$ می‌باشد. برای این منظور، از طرفین رابطه ۲۱ مقدار میانگین گرفته می‌شود، که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle V(t + dt) - V(t) \rangle &= \\ \left\langle -\gamma V(t) dt + \sqrt{\beta^r dt} N_t^{t+dt}(\cdot, 1) \right\rangle &= -\gamma \langle V(t) \rangle dt \\ \left\langle -\gamma \langle V(t) \rangle dt + \sqrt{\beta^r dt} < N_t^{t+dt}(\cdot, 1) \right\rangle & \end{aligned} \quad (23)$$

در اینجا $\langle N_t^{t+dt}(\cdot, 1) \rangle = 0$ و از این‌رو در نهایت داریم:

$$\frac{d\langle V(t) \rangle}{dt} = -\gamma \langle V(t) \rangle \quad (24)$$

با حل این معادله دیفرانسیل مرتبه اول، به سادگی می‌توان نشان داد:

$$\langle V(t) \rangle = V(\cdot) e^{-\gamma t} \quad (25)$$

در شکل ۲ نمودار $\langle V(t) \rangle$ برای مقادیر مشخص از پارامترها رسم شده است.

$$X(dt) = X(\cdot) + \sqrt{\delta^r dt} N_{\cdot}^{rdt}(\cdot, 1) \quad (13)$$

و همچنین برای $t = dt$

$$X(2dt) = X(dt) + \sqrt{\delta^r dt} N_{dt}^{rdt}(\cdot, 1) \quad (14)$$

با جای‌گذاری رابطه ۱۳ در رابطه ۱۴ خواهیم داشت:

$$X(4dt) = X(\cdot) + \sqrt{\delta^r dt} N_{\cdot}^{rdt}(\cdot, 1) + \sqrt{\delta^r dt} N_{dt}^{rdt}(\cdot, 1) \quad (15)$$

از آن‌جا که $N_{\cdot}^{rdt}(\cdot, 1)$ و $N_{dt}^{rdt}(\cdot, 1)$ در بازه زمانی جدا از هم هستند، در نتیجه مستقل از هم بوده و با توجه به نتیجه جمع خطی دو فرایند نرمال خواهیم داشت:

$$X(4dt) = X(\cdot) + N_{\cdot}^{rdt}(\cdot, \delta^r 4dt) \quad (16)$$

با تکرار این روش به جواب نهایی خواهیم رسید:

$$X(t) = X(\cdot) + N_{\cdot}^t(\cdot, \delta^r t) \quad (17)$$

فرایندی که دارای میانگین صفر و واریانسی که به صورت خطی با زمان افزایش می‌یابد باشد، فرایند واینر نامیده می‌شود.

۳. معادله لانگوین

قانون دوم نیوتن برای یک ذره به جرم m با درنظر گرفتن متغیرهای تصادفی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{F(t)}{m} \quad (18)$$

که در آن F نیرو،

$$V(t) = \frac{dX(t)}{dt} \quad (19)$$

سرعت ذره و $X(t)$ مکان ذره است. رابطه ۱۹ را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$X(t + dt) - X(t) = V(t) dt \quad (20)$$

لانگوین^۱ با در نظر گرفتن جمله اختلالی نویه سفید و جمله چسبندگی، معادله نیوتن (رابطه ۱۸) را به صورت زیر نوشت:

2. Ornstein-Uhlenbeck

1. Langevin



بنابراین رابطه ۲۹ به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$d\langle V(t)^r \rangle = -\gamma \langle V(t)^r \rangle dt + \beta^r dt \quad (32)$$

و یا

$$\frac{d\langle V(t)^r \rangle}{dt} = -\gamma \langle V(t)^r \rangle + \beta^r \quad (33)$$

با در نظر گرفتن شرط اولیه، جواب رابطه ۳۳ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\langle V(t)^r \rangle = V(\cdot)^r e^{-\gamma t} \left(\frac{\beta^r}{\gamma} \right) (1 - e^{-\gamma t}) \quad (34)$$

با توجه به معادله واریانس می‌توان نوشت:

$$\text{var}\{V(t)\} = \langle V(t)^r \rangle - \langle V(t) \rangle^r = \left(\frac{\beta^r}{\gamma} \right) (1 - e^{-\gamma t}) \quad (35)$$

در شکل ۳ منحنی $\{V(t)\}$ به ازای $\beta=1$ و $\gamma=1$ رسم شده است.

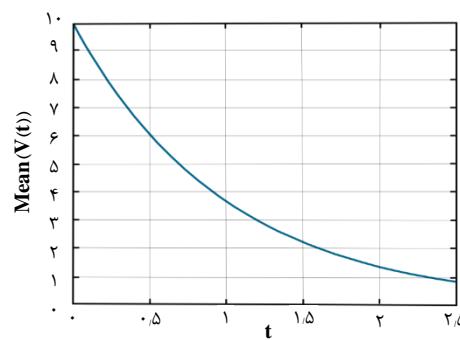
با جایگذاری رابطه‌های ۲۵ و ۳۵ در رابطه ۲۲، جواب معادله لانگوین به دست می‌آید:

$$V(t) = N_t^t(\cdot, \cdot) (V(\cdot)^r e^{-\gamma t}, \left(\frac{\beta^r}{\gamma} \right) (1 - e^{-\gamma t})) \quad (36)$$

در شکل ۴ منحنی $V(t)$ برای حالتی خاص رسم شده است. این حالت یک فرایند اورنستین-اولنبرگ را نمایش می‌دهد وتابع چگالی مربوطه به صورت زیر می‌باشد:

$$p(v, t) = \frac{\exp \left[\frac{-(v - v_0 e^{-\gamma t})^r}{2 \left(\frac{\beta^r}{\gamma} \right) (1 - e^{-\gamma t})} \right]}{\sqrt{2\pi} \left(\frac{\beta^r}{\gamma} \right) (1 - e^{-\gamma t})} \quad (37)$$

در اینجا $v = V(\cdot)$ و سرعت ذرات براونی می‌باشد.



شکل ۲. نمودار mean(V(t)) به ازای $\gamma=1$ و $V(\cdot)=10$

برای پیدا کردن واریانس $V(t)$ از تعریف زیر استفاده می‌شود:

$$d[V(t)^r] = [V(t + dt)]^r - [V(t)]^r \quad (26)$$

با جایگذاری رابطه ۲۶ در رابطه ۲۶ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d[V(t)^r] &= [V(t)(1 - \gamma dt) + \sqrt{\beta^r dt} N_t^{t+dt}(\cdot, \cdot)]^r \\ &\quad - [V(t)]^r = V(t)^r (1 - \gamma dt)^r + \\ &\quad \gamma V(t)(1 - \gamma dt) \sqrt{\beta^r dt} N_t^{t+dt}(\cdot, \cdot) + \\ &\quad \beta^r dt [N_t^{t+dt}(\cdot, \cdot)]^r - V(t)^r \end{aligned} \quad (27)$$

با انجام محاسبات ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d[V(t)^r] &= \gamma V(t)^r dt + \gamma V(t) \sqrt{\beta^r dt} N_t^{t+dt}(\cdot, \cdot) \\ &\quad + \beta^r dt [N_t^{t+dt}(\cdot, \cdot)]^r \end{aligned} \quad (28)$$

در اینجا از جملاتی که دارای $\frac{r}{dt}$ و $\frac{r}{dt}$ هستند، صرف نظر شده است.

با متوسط‌گیری از رابطه ۲۸ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d\langle V(t)^r \rangle &= -\gamma \langle V(t)^r \rangle dt + \\ &\quad \gamma \langle V(t) N_t^{t+dt}(\cdot, \cdot) \rangle \sqrt{\beta^r dt} + \beta^r dt \end{aligned} \quad (29)$$

با در نظر گرفتن اینکه $V(t)$ ترکیب خطی از

$$N_t^{dt}(\cdot, \cdot), N_{dt}^{rdt}(\cdot, \cdot), \dots, N_{t-dt}^t(\cdot, \cdot) \quad (30)$$

است، می‌توان نوشت:

$$\langle V(t) N_t^{t+dt}(\cdot, \cdot) \rangle = \langle V(t) \rangle \langle N_t^{t+dt}(\cdot, \cdot) \rangle = 0 \quad (31)$$



$$N_{\cdot}^{dt}(\cdot, 1), N_{dt}^{rdt}(\cdot, 1), \dots, N_{t-dt}^t(\cdot, 1) \quad (40)$$

بنابراین سرعت ذرات و جواب رابطه ۳۹ دارای توزیع نرمال به فرم زیر خواهد بود:

$$V(t) = N_{\cdot}^{dt}(\langle V(t)^r \rangle), \text{var}V((t)) \quad (41)$$

از این رو مشابه روش بالا، با متوسط‌گیری از رابطه ۳۹ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle V(t+dt) - V(t) \rangle &= \\ -\frac{1}{\tau} \langle V(t) \rangle dt - \left\langle \frac{eE}{m} \right\rangle dt + \sqrt{\beta^r dt} &< N_t^{t+dt}(\cdot, 1) \end{aligned} \quad (42)$$

با صفر شدن جملات و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\langle V(t+dt) - V(t) \rangle = \frac{1}{\tau} \langle V(t) \rangle dt \quad (43)$$

و درنهایت داریم:

$$\langle V(t) \rangle = V(\cdot) e^{\frac{-t}{\tau}} \quad (44)$$

برای پیدا کردن واریانس از روش بالا استفاده می‌شود؛ از این رو داریم:

$$\frac{d\langle V(t)^r \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau} \langle V(t)^r \rangle + \beta^r - \frac{2eE}{m} V(\cdot) e^{\frac{-t}{\tau}} \quad (45)$$

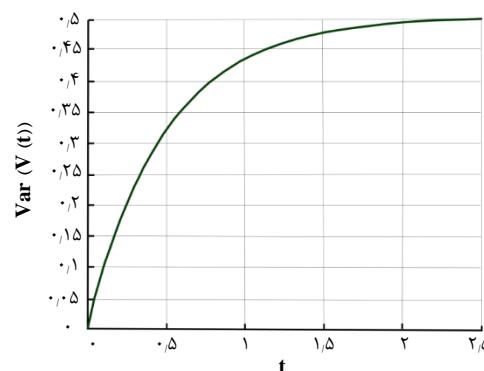
برای حل این معادله، فرض کنید $V(t)^r = y$ باشد؛ در این صورت داریم:

$$y' + \frac{\gamma}{\tau} y = \beta^r - \frac{2eE}{m} V(\cdot) e^{\frac{-t}{\tau}} \quad (46)$$

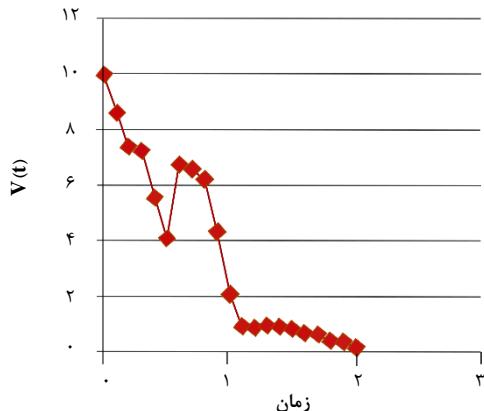
با ضرب طرفین رابطه ۴۶ در عامل انتگرال‌ساز خواهیم داشت:

$$e^{\frac{\gamma t}{\tau}} dy + \frac{\gamma}{\tau} e^{\frac{\gamma t}{\tau}} y dt = \beta^r e^{\frac{\gamma t}{\tau}} dt - \frac{2eE}{m} V(\cdot) e^{\frac{\gamma t}{\tau}} dt \quad (47)$$

سمت چپ این رابطه یک دیفرانسیل کامل است، یعنی:



شکل ۳. منحنی $\text{var}(V(t))$ به ازای $\beta = 1$ و $\gamma = 1$.



شکل ۴. منحنی $V(t)$ به ازای $\beta = 1$ ، $\gamma = 1$ و $V(\cdot) = 10$.

۴. مدار الکتریکی با نوفه سفید

رسانندگی الکتریکی در یک رسانا با حضور نوفه سفید در این بخش مورد مطالعه قرار گرفته است. فرض کنید معادله حرکت الکترون‌ها در داخل رسانا با وجود میدان الکتریکی به شکل زیر باشد [۲]:

$$m \frac{dV(t)}{dt} = -eE - \frac{mV(t)}{\tau} \quad (38)$$

در این رابطه $V(t)$ سرعت الکترون‌ها، E میدان الکتریکی، m جرم الکtron، e بار الکtron و τ میانگین فاصله زمانی بین دو برخورد است. فرم تصادفی رابطه ۳۸ با وجود اختلال نوفه سفید به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} V(t+dt) - V(t) &= \\ -\frac{1}{\tau} V(t) dt - \frac{eE}{m} dt + \sqrt{\beta^r dt} &< N_t^{t+dt}(\cdot, 1) \end{aligned} \quad (39)$$

باتوجه به این که $V(dt), V(2dt), \dots, V(t)$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با توزیع نرمال است، ترکیب خطی آن‌ها نیز توزیع نرمال خواهد بود.



که در آن n چگالی الکترون‌ها در رسانا می‌باشد. در نهایت به جواب رابطه ۳۹ خواهیم رسید:

$$V(t) = N'_t(\cdot, \cdot) \begin{pmatrix} V(\cdot)e^{\frac{-t}{\tau}}, \frac{\tau\beta^r}{2} \begin{pmatrix} 1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \\ -e^{\frac{-t}{\tau}} \end{pmatrix} + \\ \frac{2eEV(\cdot)\tau}{m} \begin{pmatrix} e^{\frac{-t}{\tau}} - e^{\frac{-t}{\tau}} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (56)$$

با توجه به قانون اهم در رسانای الکتریکی:

$$J = -neV(t) \quad (57)$$

که در آن n چگالی الکترون‌ها، e بار الکترون‌ها و J چگالی جریان را مشخص می‌کنند، می‌توان برای میانگین و واریانس چگالی جریان تصادفی نوشت:

$$\langle J \rangle = -ne \langle V(t) \rangle, \quad \text{var}(J) = -ne \text{ var}(V(t)) \quad (58)$$

بنابراین داریم:

$$\langle J \rangle = -neV(\cdot)e^{\frac{-t}{\tau}}, \quad (59)$$

و همچنین:

$$\text{var}(J) = -ne \left\{ \frac{\tau\beta^r}{2} \begin{pmatrix} 1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \\ -e^{\frac{-t}{\tau}} \end{pmatrix} + \frac{2eEV(\cdot)\tau}{m} \begin{pmatrix} e^{\frac{-t}{\tau}} - e^{\frac{-t}{\tau}} \end{pmatrix} \right\} \quad (60)$$

میانگین هدایت الکتریکی نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\langle J \rangle}{E} = \frac{neV(\cdot)e^{\frac{-t}{\tau}}}{E} \quad (61)$$

و برای واریانس هدایت الکتریکی داریم:

$$\text{var}V(\sigma) = \frac{\text{var}(J)}{E} = \quad (62)$$

$$d \begin{pmatrix} e^{\frac{-t}{\tau}} y \\ e^{\frac{-t}{\tau}} \end{pmatrix} = \beta^r e^{\frac{-t}{\tau}} dt - \frac{2eE}{m} V(\cdot) e^{\frac{-t}{\tau}} dt \quad (48)$$

با انجام تعدادی محاسبه و در نظر گرفتن شرط اولیه، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\langle V(t)^r \rangle = \frac{\tau\beta^r}{2} \begin{pmatrix} 1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \\ -e^{\frac{-t}{\tau}} \end{pmatrix} + V(\cdot)^r e^{\frac{-t}{\tau}} + \frac{2eEV(\cdot)\tau}{m} \begin{pmatrix} e^{\frac{-t}{\tau}} - e^{\frac{-t}{\tau}} \end{pmatrix} \quad (49)$$

با توجه به رابطه ۳۵ خواهیم داشت:

$$\text{var}(V(t)) = \frac{\tau\beta^r}{2} \begin{pmatrix} 1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \\ -e^{\frac{-t}{\tau}} \end{pmatrix} + \frac{2eEV(\cdot)\tau}{m} \begin{pmatrix} e^{\frac{-t}{\tau}} - e^{\frac{-t}{\tau}} \end{pmatrix} \quad (50)$$

برای پیدا کردن β با توجه به این که در حالت تعادل

$$\frac{m \text{ var}(V(\infty))}{2} = \frac{m\tau\beta^r}{4} \quad (51)$$

است و همچنین با یادآوری قضیه همپاری انرژی، داریم:

$$\frac{m \text{ var}(V(\infty))}{2} = \frac{kT}{2} \quad (52)$$

که در این رابطه، k ثابت بولتزمن و T دما می‌باشد. با توجه به روابط ۵۱ و ۵۲ خواهیم داشت:

$$\frac{m\tau\beta^r}{4} = \frac{kT}{2} \quad (53)$$

از آن جا که τ در حالت پایا و تعادل به صورت زیر است:

$$\tau = \frac{\sigma m}{ne^r} \quad (54)$$

با در نظر گرفتن روابط ۵۳ و ۵۴ خواهیم داشت:

$$\beta = \sqrt{\frac{2kTne^r}{\sigma m^r}} \quad (55)$$



$$M(t) = N^t(\cdot, \cdot)(M(\cdot)e^{-\lambda t}, \frac{\beta^\tau}{\tau} (1 - e^{-\lambda t})) \quad (69)$$

برای محاسبه β از رابطه ۵۲ استفاده می‌شود:

$$\frac{\beta^\tau T_{1/2}}{2 \ln 2} = \frac{kT}{2} \quad (70)$$

که در نهایت خواهیم داشت:

$$\beta = \sqrt{\frac{\ln 2 kT}{T_{1/2}}} \quad (71)$$

این عبارت، رابطه بین واریانس و دما با پرتوزایی را نشان می‌دهد.

۶. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با در نظر گرفتن جمله اختلالی از نوع نوفه سفید در مدل‌های معین، یعنی با اضافه کردن جمله تصادفی به معادلات دیفرانسیل، مدل‌های تعمیم‌یافته پیشنهاد شده است. به عنوان دو نمونه از این مدل‌ها، نوفه سفید به جریان الکتریکی و واپاشی رادیواکتیو اضافه شده و روابط مربوطه حل شده است. علاوه بر این، رابطه کمیت‌های فیزیکی این مدل‌ها با اختلال‌های تصادفی به دست آمده است.

روش ارایه شده در این پژوهش می‌تواند به عنوان راه حلی برای وارد کردن اثر اختلال در سایر پدیدهای فیزیکی مورد استفاده قرار گیرد.

$$\frac{ne \left[\frac{\tau \beta^\tau}{2} \left(1 - e^{-\frac{\tau t}{\tau}} \right) + \frac{2eEV(\cdot)\tau}{m} \left(e^{\frac{-\tau t}{\tau}} - e^{\frac{-t}{\tau}} \right) \right]}{E}$$

در اینجا اثر یک جمله تصادفی در جریان الکتریکی به دست آمد که در حالت تعادل به نتایج بدون اختلال منجر می‌شود.

۵. ذرات واپاشیده در عناصر رادیواکتیو

معادله واپاشی برای هسته مواد رادیواکتیو به صورت زیر است [۱]:

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda M \quad (63)$$

که در آن M تعداد هسته‌های ناواپاشیده و λ ثابت واپاشی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \quad (64)$$

که $T_{1/2}$ نیمه عمر نامیده می‌شود. اگر جمله تصادفی نوفه سفید به رابطه ۲۵ اضافه شود، خواهیم داشت:

$$dM = -\lambda M dt + \sqrt{\beta^\tau dt} N_t^{t+dt}(\cdot, \cdot) \quad (65)$$

با توجه مستقل بودن متغیرهای تصادفی زیر:

$$M(dt), M(2dt), \dots, M(t) \quad (66)$$

و همچنین با توجه به این‌که این متغیرها دارای توزیع نرمال‌های زیر هستند:

$$N_{\cdot}^{dt}(\cdot, \cdot), N_{dt}^{rdt}(\cdot, \cdot), \dots, N_{t-dt}^t(\cdot, \cdot) \quad (67)$$

بنابراین ترکیب خطی آن‌ها نیز دارای توزیع نرمال خواهد بود؛ به عبارت دیگر:

$$M(t) = N^t(\cdot, \cdot) \langle M \rangle, \text{var}(M)) \quad (68)$$

در مقایسه با رابطه ۲۱، میانگین و واریانس $M(t)$ به صورت زیر خواهد بود:



مراجع

1. A. Papoulis, S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. McGraw-Hill Europe, 2002.
2. N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Advanced Solid State Physics*, 1st edition, Cengage Learning, 1976.
3. P. W. Jones and P. Smith, *Stochastic Processes: An Introduction*, 3rd ed. Chapman and Hall/CRC, 2020.
4. A. Parsian, *Basics of Probability and Statistics for Science and Engineering Students*, 3rd ed. Isfahan University of Technology, 1397.
5. G.A. Parham, *Random Processes*, Shahid Chamran University of Ahvaz, 1389.
6. M. Mohseni, *Statistical Mechanics*, Payame Noor University Press, Tehran, 1384.
7. S.M. Ross, *Stochastic Processes*, 2nd ed. Wiley, 1996.
8. W.E. Meyerhof, *Elements of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, 1967.
9. M. Arkani, et al. *Design and construction of a two-channel data acquisition system for random processes based on FPGA*, *Journal of Nuclear Science and Technology*, **36**(2), 29 (1394)
10. R. Rezaian, R. Farnoush, *Numerical comparison of the solution of the stochastic differential equation with Gaussian and Poisson white noise*, *Journal of Operational Research and Its Applications*, **7**(1), 93 (2010) (In Persian)
11. R. Rezaian, R. Farnoush, and G. Yari, *Effects of white and mixed noise permutation on numerical solution of stochastic differential equation related to bio-mathematical model*, *Journal of Operational Research and Its Applications*, **6**(23), 19, (1388) (In Persian)
12. D. S. Lemons, *An Introduction to stochastic processes in physics*, JHU Press, (2002).
13. S. Chandrasekhar, *Stochastic problems in physics and astronomy*, *Rev. Mod. Phys.*, **15**(1) (1943).
14. D.T. Gillespie, *The mathematics of Brownian motion and Johnson noise*, *Am. J. Phys.*, **64** (3) 225 (1996).
15. M. Kac, *Random walk and theory of Brownian motion*, *Am. Math. Mon.*, **54**(7) 369, (1947).
16. I. Karatzas, S Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, 2nd ed. Springer-Verlag New York, (2012).
17. M. Kijma, *Stochastic processes with applications in finance*, Chapman and Hall/CRC, (2002).
18. C. H. Eab, S. C. Lim, *Ornstein-Uhlenbeck process with fluctuating damping*. *Physica A*, **492**, 790 (2018).
19. A. S. Balankin, et al., *Noteworthy fractal features and transport properties of Cantor tartans*, *Phys. Lett. A*, **382**(23), 1534, (2018).
20. A. K Golmankhaneh, A. S. Balankin, *Sub-and super-diffusion on Cantor sets: Beyond the paradox*, *Phys. Lett. A*, **382**(14), 960 (2018).
21. A. Elisa, D. Nualart, F. Viens, *Stochastic heat equation with white-noise drift*, *Annales de l'Institut Henri Poincaré (B) Probability and Statistics*, **36**(2), 181 (2000).

COPYRIGHTS

©2021 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.



استناد به این مقاله

علیرضا خلبانی گلستانخانه، رویا عباسزاده، امیر پیشکو (۱۴۰۰)، حل معادلات تصادفی مربوط به جریان الکتریکی و تابش مواد رادیواکتیو با اعمال اختلال نوفه سفید، ۹۶

۱۱۲-۱۰۴

DOI: 10.24200/nst.2021.1206

Url: https://jonsat.nstri.ir/article_1206.html