مجله علوم و فنون هسته‌ای، جلد ۹۶، شماره ۲، تابستان ۱۴۰۰

Journal of Nuclear Science and Technology
Vol. 96, No. 3, 2021

حل معادلات تصادفی مربوط به جریان الکتریکی و تابش مواد رادیواکتیو با اعمال اختلال نوفه سفید

علیرضا خلیلی گلمانخانه[1*]، رویا عباس زاده[1]، امیر پیشکو[2]

۱. گروه فیزیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ارومیه، صندوق پستی: ۹۶۹، ارومیه-ایران

۲. پژوهشکده فیزیک و شتابگرها، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۱۳۳۹-۱۴۱۵۵، تهران-ایران

مقاله‌ی فنی

تاریخ دریافت مقاله: ۹۹/۸/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۱۱/۴

چکیده

علی‌رغم اینکه سیستم‌های فیزیکی بیش‌تر توسط معادله‌های دیفرانسیل معین مدل‌سازی می‌شوند، چون در اغلب موارد از اثرات تصادفی صرف‌نظر شده است، از این‌رو جواب‌ها با نتایج تجربی سازگار نیستند. در این پژوهش، هدف بررسی اثر اختلال تصادفی «نوفه سفید» بر روی دو مدل فیزیکی است. در ابتدا متغیرها و فرایندهای تصادفی مرور شده است. سپس به حل معادله لانگوین، که فرم کلی یک معادله تصادفی با اختلال نوفه سفید است، پرداخته شده و دو مدل تصادفی فیزیکی برای#جریان الکتریکی و تابش مواد رادیواکتیو گردیده است. این کار با در نظر گرفتن جمله اختلالی نوفه سفید در معادلات دیفرانسیل معمولی مربوطه انجام می‌شود. با حل این معادلات تصادفی، تابع مقدار میانگین، تابع واریانس و نیز تابع فرایندهای تصادفی به‌دست خواهند آمد. در نهایت برای مطالعه بیش‌تر نتایج به‌دست آمده، ضمن انجام شبیه‌سازی، نمودارهای آن‌ها نمایش داده شده‌اند. به‌منظور شبیه‌سازی حرکت تصادفی مورد نظر، از روش مونت‌کارلو در محیط نرم‌افزار Excel استفاده شده است.

کلیدواژه‌ها: فرایند تصادفی، معادله لانگوین، اختلال تصادفی، نوفه سفید

Solving Random Equations Related to Electric Current and Radiation of Radioactive Materials with Effect of White Noise Perturbation

A. Khalili Golmankhaneh[1,*], R. Abaszade[1], A. Pishkoo[2]

1. Department of Physics, Urmia Branch, Islamic Azad University, P.O.Box: 969, Urmia, Iran.
2. Physics and Accelerators Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOI, P.O.Box: 14155-1339, Tehran-Iran

Technical Paper
Received 15.11.2020, Accepted 23.1.2021

Abstract

Physical systems are mostly modeled by certain differential equations. However, in most cases random effects are omitted and therefore, the solutions are not in agreement with the experimental results. In the present work, we have investigated the effect of white noise perturbation on two physical models. At first, we have reviewed the random variables and processes and then, we have solved the Langevin equation, which is a general form of a random equation with a random white noise perturbation. We have also proposed a stochastic model for both the electric current and radiation of radioactive materials. This is done by considering the white noise perturbation sentence in the corresponding ordinary differential equations. By solving these random equations, we have obtained the mean value function, the variance function, and the random process function, as well. Finally, the results have been simulated and the corresponding diagrams presented. In order to simulate the desired random movement, the Monte Carlo method in Microsoft Excel environment was used.

Keywords: Stochastic process, Langevin equation, Stochastic perturbation, White noise

*Email: alirezakhalili2002@yahoo.co.in

۱. مقدمه

فرایندها و رویدادهای فیزیکی در طبیعت به دو نوع معین و تصادفی تقسیم می‌شوند. نوع معین با توجه به شرایط اولیه مسئله به کمک معادله دیفرانسیل معمولی و یا جزیی فرمول‌بندی می‌شود. فرایندهای تصادفی نوع دیگری از رویدادها در طبیعت می‌باشند که به کمک متغیرها و معادلات تصادفی مدل‌سازی و توصیف می‌شوند و نقش مهمی در پیشرفت علوم و مهندسی دارند. فرایندهای تصادفی مدلی ریاضی برای بسیاری از آزمایش‌های تجربی است که نتایج آن‌ها دقیقاً مشخص نیستند. فرایندهای تصادفی نقش مهمی در توسعه مکانیک آماری تعادلی و غیر تعادلی دارد. فرایند برنولی، که از نوع تصادفی است، می‌تواند یک آزمایش تکرارشونده که تنها دو نتیجه مستقل دارد را مدل‌سازی نماید. به‌عنوان مثال، قدم زدن تصادفی یک‌بعدی نمونه‌ای از این فرایند است. خاصیت مارکوف نقش مهمی در تقسیم‌بندی فرایندهای تصادفی داشته و نشان از وابستگی آینده هر فرایند تصادفی به گذشته آن دارد. در مقابل آن‌ها فرایندهای حافظه‌دار قرار دارند که آینده این فرایندها بستگی به گذشته‌ای با حافظه طولانی دارد. فرایندهای تصادفی بر اساس فضای نمونه و پارامتر به حالت‌های گسسته و پیوسته تقسیم‌بندی می‌شوند [۱-۱۸]. حرکت براونی با حرکت ذرات و مولکول‌ها در مایعات و گازها توضیح داده می‌شود؛ درحالی‌که معادله معین مربوطه قانون دوم نیوتن است و معادله تصادفی نظیر آن معادله لانگوین می‌باشد. در این حرکت مولکول‌ها با برخورد با یکدیگر در بازه‌های زمانی متفاوت و در عین حال حرکت مستقل آن‌ها از هم به‌دست می‌آید [۱]. معادله لانگوین که حرکت یک ذره را با در نظر گرفتن قانون دوم نیوتن توصیف می‌کند نقش مهمی در پدیده نفوذ مولکول‌ها در حالت‌های مختلف ماده دارد [۱۲]. به‌تازگی حساب فرکتال‌ها جهت مدل‌سازی قدم زدن تصادفی بر روی فرکتال‌ها به‌کار برده شده است و رابطه میانگین و واریانس قدم زدن تصادفی با معادله نفوذ مقایسه شده است. مدل‌سازی که حساب فرکتال انجام می‌دهد قابل مقایسه با مدل‌سازی‌های انجام شده توسط معادلات تصادفی است [۱۹، ۲۰].

در سال‌های اخیر فرایندهای فیزیکی با وجود اختلال تصادفی، به‌دلیل کاربرد زیاد آن‌ها مورد مطالعه قرار گرفته است [۲۱]. اثر نوفه‌های سفید پواسونی و گاوسی بر مدل انتشار ویروس ایدز نشان می‌دهد نوفه سفید پواسونی در مقایسه با نوفه گاوسی دارای خطای کم‌تری است [۱۰].

با اعمال جمله نوفه سفید در مدل رشد جلبک‌ها که منجر به یک معادله دیفرانسیل تصادفی می‌شود، می‌توان معادله مربوطه را به‌وسیله روش اویلر- ماریا حل کرد [۱۱].

در راستای کارهای انجام پذیرفته در این زمینه، در پژوهش حاضر اثر نوفه سفید در مدل‌های فیزیکی مانند مدار الکتریکی و تابش مواد رادیواکتیو بررسی شده است.

نتایج اصلی این کار شامل حل ۱) معادله حاکم بر جریان الکتریکی با اضافه کردن جمله اختلالی نوفه سفید و ۲) حل معادله واپاشی هسته‌ای با این جمله اختلالی است (شکل ۱). برای این کار در ابتدا لازم است تعاریف مورد نیاز اولیه برای کمک به خواننده مرور شود (بخش دوم).

۲. تعاریف اولیه در فرایندهای تصادفی

متغیرهای تصادفی و فرایندهای تصادفی نقش مهمی در توسعه علوم مهندسی و فیزیک آماری داشته است. در این بخش به تعاریف اولیه مورد نیاز در این مقاله اشاره شده است [۱-۷].

فرایند تصادفی [1] : یک فرایند تصادفی، مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی در فضای احتمال $\{X(\omega,t),\omega\in\Omega,t\in T\}$ (Ω,F,P) است، که در آن Ω فضای نمونه، F جبر - سیگما و P اندازه احتمال می‌باشد. برای سادگی فرض می‌کنیم:

$$X(\omega,t)=X(t) \quad (۱)$$

در این‌جا T، مجموعه شاخص‌ها [2] نامیده می‌شود. مجموعه مقادیر $X(t)$ فضای وضعیت [3] یا فضای حالت فرایند تصادفی نام دارد.

میانگین [4] متغیر تصادفی: اگر $X(t)$ یک متغیر تصادفی باشد، میانگین متغیر تصادفی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E[X(t)]=\int X(t)\rho x(\omega)\mathrm{d}\omega \quad (۲)$$

که در آن $\rho x(\omega)$ چگالی احتمال اعضای مجموعه $X(\omega,\mathrm{t}=\mathrm{cons\ tan\ t})$ می‌باشد.

شکل ۱. معادلات معین و همتای تصادفی آن‌ها در تمامی بخش‌های مقاله.

1. Random processes
2. Index set
3. State space
4. Mean

واریانس [1] فرایند تصادفی: اگر $X(t)$ یک فرایند تصادفی باشد، واریانس آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{var}_X(t)=(E[(X(t)-E[(X)])^{۲} \qquad (۳)$$

نمو فرایند تصادفی [2]: اگر $\{X(t),t\geq ۰\}$ یک فرایند تصادفی پیوسته باشد. تفاضل $\{X(t)-X(s)\}$ درفاصله زمانی (s,t) را نمو آن فرایند می‌گویند.

فرایند تصادفی مانا [3]: فرایند تصادفی $X(t)$ دارای توزیع نموی که فقط بستگی به تفاضل $(t-s)$ باشد $(s<t)$ را مانا گویند.

تابع خودهمبستگی [4]: اندازه وابستگی بین فرایند تصادفی $X(t)$ به کمک تابع خود همبستگی، که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، به‌دست می‌آید:

$$R_X(t,s)=E\left[X(t)X(s)\right] \qquad (۴)$$

تابع اتو کوواریانس [5]: برای هر فرایند تصادفی X اتو کواریانس به‌صورت زیرتعریف می‌شود:

$$K_X(t,s)=R_X(t,s)-E\left[X(t)X(s)\right] \qquad (۵)$$

تابع همبستگی [6]: برای هر فرایند تصادفی $X(t)$ تابع همبستگی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$C_X(t,s)=E\left[X(t)X(s)\right]-E\left[X(t)\right]E\left[X(s)\right] \qquad (۶)$$

فرایند واینر [7]: یک فرایند تصادفی پیوسته را واینر $X(t)$ گویند اگر:

۱. $X(۰)=۰$ برای حالت $t\geq ۰$.
۲. نمو $X(t)-X(s)$ دارای توزیع گاوسی [8] با میانگین صفر است و واریانس آن تابعی از $(t-s)$ باشد.
۳. نموها مستقل و بدون همپوشانی باشند.

حرکت براونی [9] مثالی از فرایند واینر است.

معادله فرایند واینر: اگر $X(t)$ یک فرایند تصادفی واینر باشد، از معادله تصادفی [10] زیر تبعیت می‌کند [۱-۷]:

1. Invariance
2. Increments
3. Stationary processes
4. Auto-correlation function
5. Auto-covariance
6. Correlation
7. Wiener
8. Gaussian
9. Brownian motion
10. Stochastic

$$X(t+\mathrm{d}t)-X(t)=F(X(t),\mathrm{d}t) \qquad (۷)$$

که در آن تابع انتشار F [11] به‌صورت زیر است:

$$F\left[X(t),\mathrm{d}t\right]=\sqrt{\delta^{۲}\mathrm{d}t}\,N_t^{t+\mathrm{d}t}(۰,۱) \qquad (۸)$$

در این رابطه، $\delta^{۲}$ پارامتر مشخصه فرایند [12] تصادفی نوفه سفید گاوسی می‌باشد و در معادله $N_t^{t+\mathrm{d}t}(۰,۱)$، یک توزیع نرمال [13] با میانگین صفر و واریانس یک در بازه $(t,t+\mathrm{d}t)$ است. با فرض اینکه مقدار $X(t)$ در زمان t برابر $x(t)$ باشد، از این‌رو رابطه ۱ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$X(t+\mathrm{d}t)=N(x(t),\delta^{۲}\mathrm{d}t) \qquad (۹)$$

با توجه به حساب ایتو [14] از رابطه زیر استفاده می‌شود [۱۲]:

$$X(t+\mathrm{d}t)-X(t)=\left[X(t+\mathrm{d}t)-X(t+\frac{\mathrm{d}t}{۲})\right]+\left[X(t+\frac{\mathrm{d}t}{۲})-X(t)\right] \qquad (۱۰)$$

به کمک رابطه ۱۰، می‌توان رابطه ۸ را به‌صورت زیر تبدیل کرد [۱۲]:

$$\sqrt{\delta^{۲}\mathrm{d}t}\;N_t^{t+dt}(۰,۱)=\sqrt{\delta^{۲}\left(\frac{dt}{۲}\right)}N_{t+\frac{dt}{t}}^{t+dt}(۰,۱)+\sqrt{\delta^{۲}\left(\frac{dt}{۲}\right)}N_t^{t+\frac{dt}{۲}}(۰,۱) \qquad (۱۱)$$

این معادله را خودسازگار [15] می‌نامند. این شرط وقتی برقرار است که $N_t^{t+\frac{dt}{۲}}(۰,۱)$ و $N_{t+\frac{dt}{t}}^{t+dt}(۰,۱)$ مستقل از هم باشند. اکنون می‌توان معادله حرکت مربوط به ذرات را، که حرکت براونی در یک بعد دارند، به‌صورت زیر نوشت و در ادامه آن را حل کرد:

$$X(t+\mathrm{d}t)-X(t)=\sqrt{\delta^{۲}\mathrm{d}t}\;N_t^{t+dt}(۰,۱) \qquad (۱۲)$$

این معادله حرکت پیوسته براونی است که در راستای محور x اتفاق می‌افتد. اگر در رابطه ۱۲ فرض کنیم $t=۰$ باشد، در نتیجه خواهیم داشت:

11. Markov propagator function
12. Process-characterizing parameter
13. Unit normal distribution
14. Ito calculus
15. Self-consistency

$$X(\mathrm{d}t) = X(0) + \sqrt{\delta^2 \mathrm{d}t}\; N_0^{0+dt}(0,1) \qquad (۱۳)$$

و هم‌چنین برای $t=\mathrm{d}t$

$$X(2\mathrm{d}t) = X(\mathrm{d}t) + \sqrt{\delta^2 \mathrm{d}t}\; N_{\mathrm{d}t}^{2\mathrm{d}t}(0,1) \qquad (۱۴)$$

با جای‌گذاری رابطه ۱۳ در رابطه ۱۴ خواهیم داشت:

$$X(2\mathrm{d}t) = X(0) + \sqrt{\delta^2 \mathrm{d}t}\; N_0^{\mathrm{d}t}(0,1) + \sqrt{\delta^2 \mathrm{d}t}\; N_{\mathrm{d}t}^{2\mathrm{d}t}(0,1) \qquad (۱۵)$$

از آن‌جا که $N_0^{\mathrm{d}t}(0,1)$ و $N_{\mathrm{d}t}^{2\mathrm{d}t}(0,1)$ در بازه زمانی جدا از هم هستند، در نتیجه مستقل از هم بوده و با توجه به نتیجه جمع خطی دو فرایند نرمال خواهیم داشت:

$$X(2\mathrm{d}t) = X(0) + N_0^{2\mathrm{d}t}(0,\delta^2 2\mathrm{d}t) \qquad (۱۶)$$

با تکرار این روش به جواب نهایی خواهیم رسید:

$$X(t) = X(0) + N_0^{t}(0,\delta^2 t) \qquad (۱۷)$$

فرایندی که دارای میانگین صفر و واریانسی که به‌صورت خطی با زمان افزایش می‌یابد باشد، فرایند واینر نامیده می‌شود.

۳. معادله لانگوین

قانون دوم نیوتن برای یک ذره به جرم m با درنظرگرفتن متغیرهای تصادفی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\mathrm{d}V(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{F(t)}{m} \qquad (۱۸)$$

که در آن F نیرو،

$$V(t) = \frac{\mathrm{d}X(t)}{\mathrm{d}t} \qquad (۱۹)$$

سرعت ذره و $X(t)$ مکان ذره است. رابطه ۱۹ را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$X(t+\mathrm{d}t) - X(t) = V(t)\mathrm{d}t \qquad (۲۰)$$

لانگوین [1] با در نظر گرفتن جمله اختلالی نوفه سفید و جمله چسبندگی، معادله نیوتن (رابطه ۱۸) را به‌صورت زیر نوشت:

$$V(t+\mathrm{d}t) - V(t) = -\gamma V(t)\mathrm{d}t + \sqrt{\beta^2 \mathrm{d}t}\, N_t^{t+dt}(0,1) \qquad (۲۱)$$

رابطه ۲۱ فرایند تصادفی اورنشتاین- اولنبک [2] [۱۸] را توضیح می‌دهد؛ به‌عبارت دیگر، مدلی تصادفی برای حرکت براونی مولکول‌ها و برخورد آن‌ها با مولکول‌های دیگر می‌باشد.

در این مرحله، هدف حل رابطه ۲۱ است. با توجه به این‌که دنباله متغیرهای تصادفی زیر مستقل از هم هستند، از این‌رو ترکیب خطی آن‌ها نیز توزیع نرمال است، یعنی:

$$V(\mathrm{d}t), V(2\mathrm{d}t), \dots, V(t) \qquad (۲۲)$$

که هر کدام از این متغیرها به‌ترتیب دارای توزیع احتمالی به‌صورت زیر هستند:

$$N_0^{\mathrm{d}t}(0,1), N_{\mathrm{d}t}^{2\mathrm{d}t}(0,1), \dots, N_{t\text{-}\mathrm{d}t}^{t}(0,1) \qquad (۲۳)$$

بنابراین $V(t)$ دارای توزیع نرمال به شکل زیر می‌باشد:

$$V(t) = N_0^t(\mathrm{mean}\{V(t)\}, \mathrm{var}\{V(t)\}) \qquad (۲۴)$$

از این‌رو با توجه به رابطه ۲۲، در این مرحله هدف پیدا کردن میانگین و واریانس $V(t)$ می‌باشد. برای این منظور، از طرفین رابطه ۲۱ مقدار میانگین گرفته می‌شود، که در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \langle V(t+\mathrm{d}t) - V(t)\rangle &= \qquad (۲۳) \\ \left\langle \begin{matrix} -\gamma V(t)\mathrm{d}t + \sqrt{\beta^2 \mathrm{d}t}\, N_t^{t+dt}(0,1) \\ = -\gamma\langle V(t)\rangle \mathrm{d}t + \sqrt{\beta^2 dt} < N_t^{t+dt}(0,1) \end{matrix} \right\rangle &= -\gamma\langle V(t)\rangle \mathrm{d}t \end{aligned}$$

در این‌جا $<N_t^{t+\mathrm{d}t}(0,1)>=0$ و از این‌رو در نهایت داریم:

$$\frac{\mathrm{d}\langle V(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = -\gamma\langle V(t)\rangle \qquad (۲۴)$$

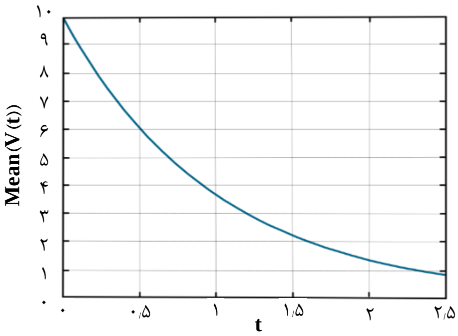
با حل این معادله دیفرانسیل مرتبه اول، به سادگی می‌توان نشان داد:

$$\langle V(t)\rangle = V(0)e^{-\gamma t} \qquad (۲۵)$$

در شکل ۲ نمودار $\langle V(t)\rangle$ برای مقادیر مشخص از پارامترها رسم شده است.

1. Langevian

2. Ornstein-Uhlenbeck



شکل ۲. نمودار mean(V(t)) به‌ازای γ=۱ و V(۰)=۱۰.

برای پیدا کردن واریانس $V(t)$ از تعریف زیر استفاده می‌شود:

$$d[V(t)^۲] = [V(t+dt)]^۲ - [V(t)]^۲ \qquad (۲۶)$$

با جای‌گذاری رابطه ۲۱ در رابطه ۲۶ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d[V(t)^۲] =& [V(t)(۱-\gamma dt) + \sqrt{\beta^۲ dt}\, N_t^{t+dt}(۰,۱)]^۲ \\ &- [V(t)]^۲ = V(t)^۲(۱-\gamma dt)^۲ + \\ &۲V(t)(۱-\gamma dt)\sqrt{\beta^۲ dt}\, N_t^{t+dt}(۰,۱) + \\ &\beta^۲ dt[N_t^{t+dt}(۰,۱)]^۲ - V(t)^۲ \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

با انجام محاسبات ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d[V(t)^۲] =& ۲\, V(t)^۲ \gamma\, dt + -۲V(t)\sqrt{\beta^۲ dt}\, N_t^{t+dt}(۰,۱) \\ &+ \beta^۲ dt[N_t^{t+dt}(۰,۱)]^۲ \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

در این‌جا از جملاتی که دارای $dt^۲$ و $dt^{\frac{۳}{۲}}$ هستند، صرف‌نظر شده است.
با متوسط‌گیری از رابطه ۲۸ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d\left\langle V(t)^۲ \right\rangle =& -۲ < V(t)^۲ > \gamma\, dt + \\ &۲\left\langle V(t) N_t^{t+dt}(۰,۱) \right\rangle \sqrt{\beta^۲ dt} + \beta^۲ dt \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

با در نظر گرفتن اینکه $V(t)$ ترکیب خطی از

$$N_۰^{dt}(۰,۱), N_{dt}^{۲dt}(۰,۱), \dots, N_{t-dt}^{t}(۰,۱) \qquad (۳۰)$$

است، می‌توان نوشت:

$$\left\langle V(t) N_t^{t+dt}(۰,۱) \right\rangle = \langle V(t) \rangle \left\langle N_t^{t+dt}(۰,۱) \right\rangle = ۰ \qquad (۳۱)$$

بنابراین رابطه ۲۹ به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$d\left\langle V(t)^۲ \right\rangle = -۲ < V(t)^۲ > \gamma dt + \beta^۲ dt \qquad (۳۲)$$

و یا

$$\frac{d\left\langle V(t)^۲ \right\rangle}{dt} = -۲ < V(t)^۲ > \beta^۲ \qquad (۳۳)$$

با در نظر گرفتن شرط اولیه، جواب رابطه ۳۳ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left\langle V(t)^۲ \right\rangle = V(۰)^۲\, e^{-۲\gamma t} \left(\frac{\beta^۲}{۲\gamma}\right)(۱-e^{-۲\gamma t}) \qquad (۳۴)$$

با توجه به معادله واریانس می‌توان نوشت:

$$\mathrm{var}\{V(t)\} = \left\langle V(t)^۲ \right\rangle - \langle V(t) \rangle^۲ = \left(\frac{\beta^۲}{۲\gamma}\right)(۱-e^{-۲\gamma t}) \qquad (۳۵)$$

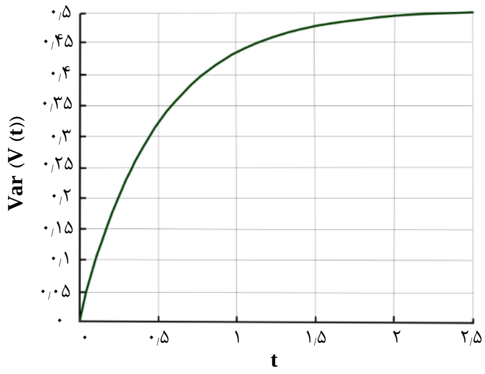
در شکل ۳ منحنی $\mathrm{var}\{V(t)\}$ به ازای β=۱ و γ=۱ رسم شده است.
با جای‌گذاری رابطه‌های ۲۵ و ۳۵ در رابطه ۲۲، جواب معادله لانگوین به‌دست می‌آید:

$$V(t) = N_۰^t(۰,۱)(V(۰)e^{-\gamma t}, (\frac{\beta^۲}{۲\gamma})(۱-e^{-۲\gamma t}) \qquad (۳۶)$$

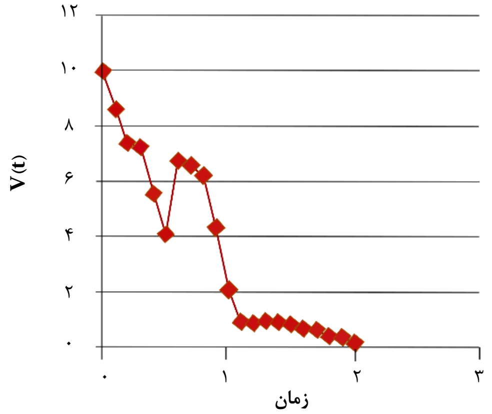
در شکل ۴ منحنی $V(t)$ برای حالتی خاص رسم شده است. این حالت یک فرایند اورنشتاین- اولنبک را نمایش می‌دهد و تابع چگالی مربوطه به‌صورت زیر می‌باشد:

$$p(v,t) = \frac{\exp\left[\dfrac{-(v - v_۰ e^{-\gamma t})^۲}{۲\left(\dfrac{\beta^۲}{۲\gamma}\right)(۱-e^{-۲\gamma t})}\right]}{\sqrt{۲\pi\left(\dfrac{\beta^۲}{۲\gamma}\right)(۱-e^{-۲\gamma t})}} \qquad (۳۷)$$

در این‌جا $V(۰) = v_۰$ و $v_۰$ سرعت ذرات براونی می‌باشد.



شکل ۳. منحنی var(V(t)) به‌ازای $\beta = 1$ و $\gamma = 1$.



شکل ۴. منحنی $V(t)$ به ازای $\gamma = 1$، $\beta = 1$ و $V(0) = 10$.

۴. مدار الکتریکی با نوفه سفید

رسانندگی الکتریکی در یک رسانا با حضور نوفه سفید در این بخش مورد مطالعه قرار گرفته است. فرض کنید معادله حرکت الکترون‌ها در داخل رسانا با وجود میدان الکتریکی به شکل زیر باشد [۲]:

$$m\frac{dV(t)}{dt} = -eE - \frac{mV(t)}{\tau} \qquad (۳۸)$$

در این رابطه $V(t)$ سرعت الکترون‌ها، E میدان الکتریکی، m جرم الکترون، e بار الکترون و τ میانگین فاصله زمانی بین دو برخورد است. فرم تصادفی رابطه ۳۸ با وجود اختلال نوفه سفید به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$V(t+dt)-V(t) = -\frac{1}{\tau}V(t)dt - \frac{eE}{m}dt + \sqrt{\beta^2 dt}\,N_t^{t+dt}(0,1) \qquad (۳۹)$$

باتوجه به این‌که $V(dt), V(2dt), \dots, V(t)$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی با توزیع نرمال است، ترکیب خطی آن‌ها نیز توزیع نرمال خواهد بود.

$$N_{\cdot}^{dt}(0,1), N_{dt}^{2dt}(0,1), \dots, N_{t-dt}^{t}(0,1) \qquad (۴۰)$$

بنابراین سرعت ذرات و جواب رابطه ۳۹ دارای توزیع نرمال به فرم زیر خواهد بود:

$$V(t) = N_{\cdot}^{dt}(\langle V(t)^2 \rangle), \mathrm{var}V((t)) \qquad (۴۱)$$

از این‌رو مشابه روش بالا، با متوسط‌گیری از رابطه ۳۹ خواهیم داشت:

$$\langle V(t+dt)-V(t)\rangle = -\frac{1}{\tau}\langle V(t)\rangle dt - \left\langle\frac{eE}{m}\right\rangle dt + \sqrt{\beta^2 dt} < N_t^{t+dt}(0,1) \qquad (۴۲)$$

با صفر شدن جملات و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\langle V(t+dt)-V(t)\rangle = \frac{1}{\tau}\langle V(t)\rangle dt \qquad (۴۳)$$

و درنهایت داریم:

$$\langle V(t)\rangle = V(0)e^{\frac{-t}{\tau}} \qquad (۴۴)$$

برای پیدا کردن واریانس از روش بالا استفاده می‌شود؛ از این‌رو داریم:

$$\frac{d\langle V(t)^2\rangle}{dt} = -2\frac{1}{\tau}\langle V(t)^2\rangle + \beta^2 - \frac{2eE}{m}V(0)e^{\frac{-t}{\tau}} \qquad (۴۵)$$

برای حل این معادله، فرض کنید $y = V(t)^2$ باشد؛ در این‌صورت داریم:

$$y' + \frac{2}{\tau}y = \beta^2 - \frac{2eE}{m}V(0)e^{\frac{-t}{\tau}} \qquad (۴۶)$$

با ضرب طرفین رابطه ۴۶ در عامل انتگرال‌ساز خواهیم داشت:

$$e^{\frac{2t}{\tau}}dy + \frac{2}{\tau}e^{\frac{2t}{\tau}}ydt = \beta^2 e^{\frac{2t}{\tau}}dt - \frac{2eE}{m}V(0)e^{\frac{-t}{\tau}}\; e^{\frac{2t}{\tau}}dt \qquad (۴۷)$$

سمت چپ این رابطه یک دیفرانسیل کامل است، یعنی:

$$\mathrm{d}\left(e^{\frac{2t}{\tau}}y\right)=\beta^{2}e^{\frac{2t}{\tau}}\mathrm{d}t-\frac{2eE}{m}V(0)e^{\frac{t}{\tau}}\mathrm{d}t \qquad (۴۸)$$

با انجام تعدادی محاسبه و در نظر گرفتن شرط اولیه، رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$<V(t)^{2}>=\frac{\tau\beta^{2}}{2}\left(1-e^{\frac{-2t}{\tau}}\right)+V(0)^{2}\,e^{\frac{-2t}{\tau}}+\frac{2eEV(0)\tau}{m}\left(e^{\frac{-2t}{\tau}}-e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \qquad (۴۹)$$

با توجه به رابطه ۳۵ خواهیم داشت:

$$\mathrm{var}(V(t))=\frac{\tau\beta^{2}}{2}\left(1-e^{\frac{-2t}{\tau}}\right)+\frac{2eEV(0)\tau}{m}\left(e^{\frac{-2t}{\tau}}-e^{\frac{-t}{\tau}}\right) \qquad (۵۰)$$

برای پیدا کردن β با توجه به این‌که در حالت تعادل

$$\frac{m\,\mathrm{var}(V(\infty))}{2}=\frac{m\tau\beta^{2}}{4} \qquad (۵۱)$$

است و هم‌چنین با یادآوری قضیه همپاری انرژی، داریم:

$$\frac{m\,\mathrm{var}(V(\infty))}{2}=\frac{kT}{2} \qquad (۵۲)$$

که در این رابطه، k ثابت بولتزمن و T دما می‌باشد. با توجه به روابط ۵۱ و ۵۲ خواهیم داشت:

$$\frac{m\tau\beta^{2}}{4}=\frac{kT}{2} \qquad (۵۳)$$

از آن‌جا که τ در حالت پایا و تعادل به‌صورت زیر است:

$$\tau=\frac{\sigma m}{ne^{2}} \qquad (۵۴)$$

با در نظر گرفتن روابط ۵۳ و ۵۴ خواهیم داشت:

$$\beta=\sqrt{\frac{2kTne^{2}}{\sigma m^{2}}} \qquad (۵۵)$$

که در آن n چگالی الکترون‌ها در رسانا می‌باشد. در نهایت به جواب رابطه ۳۹ خواهیم رسید:

$$V(t)=N_{\cdot}^{t}(0,1)\left(V(0)e^{\frac{-t}{\tau}},\frac{\tau\beta^{2}}{2}\left(1-e^{\frac{-2t}{\tau}}\right)+\frac{2eEV(0)\tau}{m}\left(e^{\frac{-2t}{\tau}}-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right) \qquad (۵۶)$$

با توجه به قانون اهم در رسانای الکتریکی:

$$J=-neV(t) \qquad (۵۷)$$

که در آن n چگالی الکترون‌ها، e بار الکترون‌ها و J چگالی جریان را مشخص می‌کنند، می‌توان برای میانگین و واریانس چگالی جریان تصادفی نوشت:

$$\langle J\rangle=-ne\langle V(t)\rangle,\qquad \mathrm{var}(J)=-ne\,\mathrm{var}(V(t)) \qquad (۵۸)$$

بنابراین داریم:

$$\langle J\rangle=-neV(0)e^{\frac{-t}{\tau}}, \qquad (۵۹)$$

و هم‌چنین:

$$\mathrm{var}(J)=-ne\left\{\frac{\tau\beta^{2}}{2}\left(1-e^{\frac{-2t}{\tau}}\right)+\frac{2eEV(0)\tau}{m}\left(e^{\frac{-2t}{\tau}}-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right\} \qquad (۶۰)$$

میانگین هدایت الکتریکی نیز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\langle\sigma\rangle=\frac{\langle J\rangle}{E}=\frac{neV(0)e^{\frac{-t}{\tau}}}{E} \qquad (۶۱)$$

و برای واریانس هدایت الکتریکی داریم:

$$\mathrm{var}V(\sigma)=\frac{\mathrm{var}(J)}{E}= \qquad (۶۲)$$

$$\frac{ne\left\{\frac{\tau\beta^{2}}{2}\left(1-e^{\frac{-2t}{\tau}}\right)+\frac{2eEV(0)\tau}{m}\left(e^{\frac{-2t}{\tau}}-e^{\frac{-t}{\tau}}\right)\right\}}{E}$$

در این‌جا اثر یک جمله تصادفی در جریان الکتریکی به‌دست آمد که در حالت تعادل به نتایج بدون اختلال منجر می‌شود.

۵. ذرات واپاشیده در عناصر رادیواکتیو

معادله واپاشی برای هسته مواد رادیواکتیو به‌صورت زیر است [۸]:

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}=-\lambda M \qquad (۶۳)$$

که در آن M تعداد هسته‌های ناواپاشیده و λ ثابت واپاشی است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\lambda=\frac{ln2}{T_{1/2}} \qquad (۶۴)$$

که $T_{1/2}$ نیمه‌عمر نامیده می‌شود. اگر جمله تصادفی نوفه سفید به رابطه ۲۵ اضافه شود، خواهیم داشت:

$$\mathrm{d}M=-\lambda M\ \mathrm{d}t+\sqrt{\beta^{2}dt}\,N_t^{t+dt}(0,1) \qquad (۶۵)$$

با توجه مستقل بودن متغیرهای تصادفی زیر:

$$M(dt),M(2dt),\ldots,M(t) \qquad (۶۶)$$

و هم‌چنین با توجه به این‌که این متغیرها دارای توزیع نرمال‌های زیر هستند:

$$N_0^{\mathrm{dt}}(0,1),\ N_{\mathrm{dt}}^{2\mathrm{dt}}(0,1),\ldots,N_{t-\mathrm{dt}}^{t}(0,1) \qquad (۶۷)$$

بنابراین ترکیب خطی آن‌ها نیز دارای توزیع نرمال خواهد بود؛ به عبارت دیگر:

$$M(t)=N_0^{t}(0,1)(\langle M\rangle,\mathrm{var}(M)) \qquad (۶۸)$$

در مقایسه با رابطه ۲۱، میانگین و واریانس $M(t)$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$M(t)=N_0^{t}(0,1)\left(M(0)e^{-\lambda t},\frac{\beta^{2}}{2\lambda}(1-e^{-2\lambda t})\right) \qquad (۶۹)$$

برای محاسبه β از رابطه ۵۲ استفاده می‌شود:

$$\frac{\beta^{2}T_{1/2}}{2ln2}=\frac{kT}{2} \qquad (۷۰)$$

که در نهایت خواهیم داشت:

$$\beta=\sqrt{\frac{ln2\ kT}{T_{1/2}}} \qquad (۷۱)$$

این عبارت، رابطه بین واریانس و دما با پرتوزایی را نشان می‌دهد.

۶. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، با در نظر گرفتن جمله اختلالی از نوع نوفه سفید در مدل‌های معین، یعنی با اضافه کردن جمله تصادفی به معادلات دیفرانسیل، مدل‌های تعمیم‌یافته پیشنهاد شده است. به‌عنوان دو نمونه از این مدل‌ها، نوفه سفید به جریان الکتریکی و واپاشی رادیواکتیو اضافه شده و روابط مربوطه حل شده است. علاوه بر این، رابطه کمیت‌های فیزیکی این مدل‌ها با اختلال‌های تصادفی به‌دست امده است.

روش ارایه‌شده در این پژوهش می‌تواند به‌عنوان راه‌حلی برای وارد کردن اثر اختلال در سایر پدیده‌های فیزیکی مورد استفاده قرار گیرد.

مراجع

1. A. Papoulis, S. U. Pillai, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, 4th ed. McGraw-Hill Europe, 2002.
2. N. W. Ashcroft and N. D. Mermin, *Advanced Solid State Physics*, 1st edition, Cengage Learning, 1976.
3. P. W. Jones and P. Smith, *Stochastic Processes: An Introduction, 3rd ed.* Chapman and Hall/CRC, 2020.
4. A. Parsian, *Basics of Probability and Statistics for Science and Engineering Students, 3rd ed.* Isfahan University of Technology, 1397.
5. G.A. Parham, *Random Processes*, Shahid Chamran University of Ahvaz, 1389.
6. M. Mohseni, *Statistical Mechanics*, Payame Noor University Press, Tehran, 1384.
7. S.M. Ross, *Stochastic Processes*, 2nd ed. Wiley, 1996.
8. W.E. Meyerhof, *Elements of Nuclear Physics*, McGraw-Hill, 1967.
9. M. Arkani, et al. *Design and construction of a two-channel data acquisition system for random processes based on FPGA*, Journal of Nuclear Science and Technology, **36**(2), 29 (1394)
10. R. Rezaian, R. Farnoush, *Numerical comparison of the solution of the stochastic differential equation with Gaussian and Poisson white noise*, Journal of Operational Research and Its Applications, **7**(1), 93 (2010) (In Presian)
11. R. Rezaian, R. Farnoush, and G. Yari, *Effects of white and mixed noise permutation on numerical solution of stochastic differential equation related to bio-mathematical model*, Journal of Operational Research and Its Applications, **6**(23), 19, (1388) (In Persian)
12. D. S. Lemons, *An Introduction to stochastic processes in physics*, JHU Press, (2002).
13. S. Chandrasekhar, *Stochastic problems in physics and astronomy*, Rev. Mod. Phys., **15**(1) (1943).
14. D.T. Gillespie, *The mathematics of Brownian motion and Johson noise*, Am. J. Phys., **64** (3) 225 (1996).
15. M. Kac, *Random walk and theory of Brownian motion*, Am. Math. Mon., *54*(7) 369, (1947).
16. I. Karatzas, S Shreve, *Brownian motion and stochastic calculus*, 2nd ed. Springer-Verlag New York, (2012).
17. M. Kijma, *Stochastic processes with applications in finance*, Chapman and Hall/CRC, (2002).
18. C. H. Eab, S. C. Lim, *Ornstein–Uhlenbeck process with fluctuating damping*. Physica A, **492**, 790 (2018).
19. A. S. Balankin, et al., *Noteworthy fractal features and transport properties of Cantor tartans*, Phys. Lett. A, **382**(23), 1534, (2018).
20. A. K Golmankhaneh, A. S. Balankin, *Sub-and super-diffusion on Cantor sets: Beyond the paradox*, Phys. Lett. A, **382**(14), 960 (2018).
21. A. Elisa, D. Nualart, F. Viens, *Stochastic heat equation with white-noise drift*, Annales de l'Institut Henri Poincare (B) Probability and Statistics, **36**(2), 181 (2000).

استناد به این مقاله

علیرضا خلیلی گلمانخانه، رویا عباس‌زاده، امیر پیشکو (۱۴۰۰)، حل معادلات تصادفی مربوط به جریان الکتریکی و تابش مواد رادیواکتیو با اعمال اختلال نوفه سفید، ۹۶، ۱۱۲-۱۰۴

DOI: 10.24200/nst.2021.1206

Url: https://jonsat.nstri.ir/article_1206.html