



## حل هامیلتونین بوهر در نقطه بحرانی $Z(5)$ با استفاده از پتانسیل مورس برای هسته $^{190}\text{Hg}$

مسعود صیدی<sup>۱\*</sup>، هادی صبری<sup>۲</sup>، روح الله غلامی<sup>۱</sup>

۱. گروه فیزیک، دانشکده فیزیک، دانشگاه ایلام، صندوق پستی: ۵۱۶-۶۹۳۱۵، ایلام - ایران

۲. دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، صندوق پستی: ۵۱۶۶۴، تبریز - ایران

\*Email: m.sayedi@ilam.ac.ir

مقاله‌ی پژوهشی

تاریخ دریافت مقاله: ۱۳۹۹/۱۲/۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۴/۱۲

### چکیده

در این مقاله، هامیلتونین مدل بوهر-ماتلسون برای محاسبه ترازهای انرژی و همچنین سطوح انرژی هسته  $^{190}\text{Hg}$  در نقطه بحرانی  $Z(5)$  حل گردید. از پتانسیل مورس برای قسمت شعاعی استفاده شده و قسمت زاویه‌ای نیز با پتانسیل نوسان‌گر هماهنگ حل گردید. از روش تکرار مجانبی برای حل معادله و تعیین ثابت‌ها در مقایسه با اطلاعات تجربی استفاده گردید. پیش‌بینی‌های این مطالعه با نتایج حاصل از حل معادله بوهر در این نقطه بحرانی با استفاده از چاه پتانسیل نامتناهی برای بخش شعاعی و همچنین پیش‌بینی‌های حد دینامیکی  $O(6)$  مدل برهم کنش بوزونی، مقایسه گردید. افزایش دقت پیش‌بینی‌ها با استفاده از پتانسیل مورس برای ترازهای انرژی در باندهای برانگیخته مشهود می‌باشد. همچنین تطابق بین پیش‌بینی‌های حاصل از این پتانسیل با نتایج مدل دینامیکی  $O(6)$  بسیار بیش‌تر می‌باشد.

**کلیدواژه‌ها:** مدل بوهر-ماتلسون، گذار فازی-شکلی، نقطه بحرانی، ترازهای انرژی، احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی، پتانسیل مورس، باندهای انرژی

## Solution of Bohr Hamiltonian in the $Z(5)$ critical point by using Morse potential for $^{190}\text{Hg}$ nucleus

M. Seidi<sup>1\*</sup>, H. Sabri<sup>2</sup>, R. Gholami<sup>1</sup>

1. Department of Physics, Ilam University, P.O.Box: 69315-516, Ilam - Iran

2. Department of Physics, University of Tabriz, P.O.Box: 51664, Tabriz - Iran

Research Article

Received 23.2.2021, Accepted 3.7.2021

### Abstract

In this paper, the Hamiltonian of Bohr-Mottelson model was solved to determine the energy levels and also energy surfaces of  $^{190}\text{Hg}$  nucleus in the  $Z(5)$  critical point. The Morse and Harmonic oscillator potentials are used for radial and angular parts of Hamiltonian, respectively. The asymptotic iteration method is used to solve radial equation and the constants of model are extracted in comparison with experimental data. The results are compared with the predictions of previous studies which solved Bohr-Hamiltonian in this critical point with using infinite well potential for radial part and also the predictions of  $O(6)$  dynamical limit of interacting boson model. Significant improvements are yield with using Morse potential in determination of energy levels of excited energy bands. Also, the results of this potential show more corresponding with the predictions of  $O(6)$  dynamical model.

**Keywords:** Bohr-Mottelson model, Shape- phase transition, Critical point, Energy levels, Electric quadrupole transition rates, Morse potential, Bands of energy



## ۱. مقدمه

طیف انرژی هسته‌های مختلف را می‌توان منبع اساسی استخراج اطلاعات پنهان آن دانست. اطلاعات تجربی غنی به دلیل پیشرفت روش‌های اندازه‌گیری از یک سو و همچنین افزایش دقت محاسبات عددی از سوی دیگر، مطالعه ترازهای انرژی هسته‌های مختلف را تبدیل به موضوع مطالعات متعدد سالیان اخیر نموده است. مدل‌های مختلف در قالب حل تحلیلی و جبری هامیلتونین سیستم‌های هسته‌ای پیشنهاد شده است که موفقیت مدل تجمعی بوهر- ماتلسون<sup>۱</sup> در توصیف کامل سطوح انرژی هسته‌های مختلف، این مدل را به عنوان پرکاربردترین مدل حل تحلیلی معرفی نموده است [۱-۲].

پدیده گذار فازی- شکلی<sup>۲</sup> هسته‌ای متناظر با ایجاد تغییرات در ساختار هسته‌های مختلف می‌باشد که به طور معمول با تغییر تعداد نوکلئون‌های در زنجیره ایزوتوپی مشاهده می‌شود. این پدیده در کنار هم‌زیستی شکلی<sup>۳</sup>، نشانه‌هایی از وجود تقارن‌های مختلف در ساختار هسته‌ها می‌باشد. نقاط بحرانی<sup>۴</sup>، همان نقطه میانی در هر ناحیه گذار فازی- شکلی می‌باشد. نقطه بحرانی  $E(5)$ ، معرف نقطه میانی گذار بین هسته‌های کروی و تغییر شکل یافته محوری،  $X(5)$ ، نقطه میانی گذار بین هسته‌های کروی و تغییر شکل یافته غیرمحوری و نقطه  $Z(5)$ ، برای توصیف گذار بین هسته‌های تغییر شکل یافته کشیده  $(SU(3))$ <sup>۵</sup> و تخت  $(SU(3))$ <sup>۶</sup> استفاده می‌شود. در چارچوب مدل تجمعی بوهر، پتانسیل‌های مختلف برای حل معادله شرودینگر در دو بخش شعاعی و زاویه‌ای (برای نقاط بحرانی پتانسیل در بازتولید طیف انرژی هسته‌های انتخابی، مبنای میزان موفقیت هر انتخاب می‌باشد [۳-۴].

چارچوب مطالعاتی نقطه بحرانی  $Z(5)$  برای اولین بار توسط بوناتوسوس و همکارانش<sup>۷</sup> در سال ۲۰۰۴ پیشنهاد شد [۵]. آن‌ها برای حل قسمت شعاعی معادله شرودینگر در مدل بوهر از پتانسیل چاه مربعی و روش تعیین پارامترهای مدل، مستقل از هسته اقدام کردند. تطابق مناسبی بین نتایج حاصل از محاسبات آن‌ها با مقادیر تجربی برای ترازهای انرژی باند پایه حاصل گردید. افزایش سهم دوران و تولید باندهای دورانی، دقت نتایج

را کاهش می‌دهد. انتخاب پتانسیل‌های متفاوت از جمله مورس [۶-۱۲]، دیویدسون [۸-۱۳] و ... برای بخش شعاعی، پیشنهادی برای بهبود پیش‌بینی‌های نظری می‌باشد. پتانسیل مورس در سالیان اخیر برای حل بخش شعاعی معادله بوهر در نقطه بحرانی  $X(5)$  مورد استفاده قرار گرفته و موفقیت آن در بررسی طیف انرژی هسته‌های تغییر شکل یافته بیش‌تر از سایر پتانسیل‌ها می‌باشد [۱۴-۲۶].

اطلاعات تجربی در خصوص طیف انرژی و احتمال گذارهای چند قطبی الکترومغناطیسی، مبنای مناسبی برای ارزیابی تقارن‌های هر هسته می‌باشند [۲۷]. هسته‌های نزدیک به لایه بسته پروتونی  $Z = 82$  و به خصوص زنجیره ایزوتوپی Hg به دلیل فزونی نوترونی و رقابت دو نیروی جفت شدگی و اندرکنش چهار قطبی، نشانه‌های متعددی از پدیده‌های گذار فازی- شکلی هسته‌ای و هم‌زیستی شکلی را نشان می‌دهند بررسی سطوح انرژی، الگوی تکرار ترازها، تغییرات انرژی‌های جدایی، قرار گرفتن این هسته‌ها بین حدود دینامیکی تغییر شکل یافته تخت و کشیده را نشان می‌دهد [۲۸-۳۱]. از طرف دیگر، این ناحیه گذار فازی شکلی در قالب مدل برهم‌کنش بوزونی<sup>۸</sup> متناسب با گذار بین دو حد دینامیکی  $SU(3)$  و  $SU(3)$  می‌باشد که نقطه میانی این ناحیه متناظر با پیش‌بینی‌های مثلث تعمیم یافته کستن<sup>۹</sup>، متناظر با حد دینامیکی  $O(6)$  است. همچنین بررسی‌های متعدد با در نظر گرفتن مشاهده پذیرهای مختلف هم‌چون احتمال گذارهای الکترومغناطیسی، انرژی‌های جدایی و ...، انطباق این زنجیره ایزوتوپی را با این حد را تأیید می‌نماید [۱۴-۲۰].

در این مطالعه طیف انرژی هسته  $^{190}\text{Hg}$  در قالب مدل BMM و حد دینامیکی  $Z(5)$  بررسی گردیده است. برای این هدف برای اولین بار از پتانسیل مورس برای حل قسمت شعاعی در خصوص هسته انتخابی استفاده شد. ثابت‌های مدل بر اساس روش تکرار نیوتون-رافسون محاسبه گردید. با مقایسه نتایج این مطالعه با مطالعات قبلی، کارایی پتانسیل انتخابی ارزیابی شد. همچنین با استفاده از روش حالت همدوس<sup>۱۰</sup> و نظریه کاتاستروف<sup>۱۱</sup>، سطوح انرژی هسته  $^{190}\text{Hg}$  در قالب حد دینامیکی  $O(6)$  تعیین شده و میزان انطباق این دو مدل در ارزیابی سطوح انرژی ارزیابی گردید.

1. Bohr- Mottelson Geometric Collective Model (BMM)
2. Quantum – Phase Transition (QPT)
3. Shape Coexistence
4. Critical Point
5. Prolate
6. Oblate
7. Bonatsos, et al

8. Interacting Boson Model (IBM)

9. Casten Extended Triangle

10. Coherent State

11. Catastrophe Theory



## ۲. روش کار

### ۱.۲ مدل تجمعی بوهر- ماتلسون

در مدل هندسی بوهر- ماتلسون، دو پارامتر  $\beta$  (شعاعی) و  $\gamma$  (زاویه‌ای) در کنار سه پارامتر متناظر با زاویه‌ای سه‌گانه دوران اولیری، فضای ۵ بعدی برای مطالعه ساختار هسته‌ها ایجاد می‌نماید. در این مدل شکل هسته‌ها با استفاده از این ۵ پارامتر توصیف می‌شود. دو شکل کشیده و تخت متناسب با هسته‌هایی هستند که علی‌رغم خروج از حالت کروی، تقارن محوری خود را حفظ نموده‌اند. هسته‌های تغییر شکل یافته در ناحیه گذار فازی بین این دو حدود هم‌چون خانواده ایزوتوپی Hg با استفاده از حد تقارنی  $Z(\Delta)$  این مدل بررسی می‌شوند. مدل  $Z(\Delta)$  برای مطالعه طیف انرژی و احتمال گذار هسته‌های تغییر شکل یافته در بخش شعاعی از چاه پتانسیل نامتناهی استفاده نمود. عدم تطابق قابل قبول نتایج این انتخاب با مقادیر تجربی متناظر در ترازهای انرژی باندهای برانگیخته، ایده استفاده از پتانسیل‌های دیگر را ایجاد نمود.

در مدل بوهر، هامیلتونین به صورت زیر [۵]:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2B} \left[ \frac{1}{\beta^*} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^* \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^* \sin^2 \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin^2 \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \right] + V(\beta, \gamma), \quad (1)$$

$$-\frac{1}{\beta^*} \sum_{k=1,2,3} \frac{Q_k}{\sin^2(\gamma - \frac{2}{3}\pi k)}$$

تعریف می‌شود که  $Q_k$  ( $k=1, 2, 3$ ) مؤلفه‌های اندازه حرکت زاویه‌ای و  $B$  پارامتر جرمی می‌باشد.  $\gamma=0$  و  $\pi/3$  متناسب با دو شکل کشیده و تخت بوده و لذا نقطه بحرانی یا همان حد دینامیکی  $Z(\Delta)$  با مقدار  $\gamma = \pi/6$  توصیف می‌شود. با تعریف دو متغیر انرژی کاهش یافته  $\varepsilon = 2BE / \hbar^2$  و پتانسیل کاهش یافته  $u = 2BV / \hbar^2$ ، و تابع موج سیستم به صورت:

$$\Psi(\beta, \gamma, \theta) = \xi_{L,\alpha}(\beta) \eta(\gamma) D_{M,\alpha}^L(\theta_i)$$

امکان جداسازی هامیلتونین به دو بخش شعاعی و زاویه‌ای حاصل می‌شود:

$$\left[ -\frac{1}{\beta^*} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^* \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{1}{\beta^*} (\varepsilon L(L+1) - \varepsilon \alpha') + u(\beta) \right] \xi_{L,\alpha}(\beta) = \varepsilon \beta \xi_{L,\alpha}(\beta), \quad (2)$$

و

$$\left[ -\frac{1}{\langle \beta^* \rangle} \frac{\partial}{\partial \gamma} \sin^2 \gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} + u(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \varepsilon \eta(\gamma), \quad (3)$$

در این رابطه،  $L$  اندازه حرکت مداری،  $\langle \beta^* \rangle$  مقدار متوسط تغییر شکل چهار قطبی و  $\xi(\beta)$  معرف ویژه تابع راستای شعاعی می‌باشد.

ما در این مقاله از روش تکرار مجانبی<sup>۱</sup> برای حل معادلات استفاده نموده‌ایم. جزئیات این روش در منابع [۲۱-۲۲] موجود می‌باشد و ما تنها به بیان خلاصه‌ای از آن می‌پردازیم. روش تکرار مجانبی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم که به صورت:

$$y'' = \lambda_0(x) y' + s_0(x) y, \quad (4)$$

می‌باشند، پیشنهاد شده و توسعه یافته است. با شرط مشتق پذیری توابع  $\lambda_0(x)$  و  $s_0(x)$ ، اگر به ازای مقادیر بزرگ و مثبت  $k$ ، با فرض:

$$\lambda_k(x) = \lambda'_{k-1}(x) + s_{k-1}(x) + \lambda_0(x) \lambda_{k-1}(x),$$

$$s_k(x) = s'_{k-1}(x) + s_0(x) \lambda_{k-1}(x), \quad k=1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

رابطه زیر برقرار باشد:

$$\frac{s_k(x)}{\lambda_k(x)} = \frac{s_{k-1}(x)}{\lambda_{k-1}(x)} = \alpha(x)$$

جواب عمومی معادله ۳ عبارت است از:

$$y(x) = e^{-\int \alpha(x) dx} \left[ C_1 + C_2 \int e^{\int [\lambda_0(x) + \alpha(x)] dx} dx \right] \quad (6)$$

با قرار دادن پتانسیل‌های مختلف در معادله شعاعی هامیلتونین بوهر، شکل معادله مشابه رابطه ۳ شده و لذا ثابت‌های  $\lambda_0(x)$  و  $s_0(x)$  تعیین می‌شوند. سپس با استفاده از روابط بازگشتی ۵، توابع  $\lambda_k(x)$  و  $s_k(x)$  تعیین می‌شود. شرط اتمام فرایند تکرار عبارت است از:

$$\Delta_k(x) = \lambda_k(x) s_{k-1}(x) - \lambda_{k-1}(x) s_k(x) = 0$$

پس ویژه مقادیر انرژی،  $\alpha(x)$ ، از ریشه‌های حاصل از رابطه بالا تعیین می‌گردد. از طرف دیگر ویژه تابع هر پتانسیل را می‌توان از مولد توابع موج که به صورت زیر تعریف می‌شود حاصل نمود:

$$y_n(x) = C_\nu e^{-\int \frac{s_n(x)}{\lambda_n(x)} dx}$$



برای بررسی نقطه بحرانی  $Z(\delta)$  استفاده می‌کنیم. ضریب نرمالیزاسیون پتانسیل مورس، واحد فرض شده است. برای حل معادله شعاعی حاوی پتانسیل مورس، از روش پکریس<sup>۱</sup> که جزئیات آن به طور کامل در منابع [۲۳-۲۴] موجود است استفاده نمودیم. در این روش ابتدا با تغییر متغیر  $x = \frac{\beta - \beta_w}{\beta_w}$  استفاده نمودیم. در این روش ابتدا با تغییر داده و سپس یا جاگذاری پتانسیل مورس، شکل معادله شعاعی عبارت است [۶]:

$$\chi''(x) + \left[ \varepsilon' - \frac{v}{(1+x^2)} - \beta_w^\tau e^{-\tau ax} - \nu \beta_w^\tau e^{-ax} \right] \chi(x) = 0 \quad (12)$$

با استفاده از روش پکریس، کمیت  $\frac{v}{(1+x^2)}$  را به صورت تابع  $u_L(x)$  حول نقطه  $x = 0$  بسط داده:

$$u_L(x) = v(1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots)$$

در نمایش نمایی، این تابع به صورت:

$$\tilde{u}_L(x) = v(c_0 + c_1 e^{-ax} + c_2 e^{-2ax} + \dots)$$

حاصل می‌شود که ثابت‌های موجود در معادله عبارتند از:

$$c_0 = 1 - \frac{\nu}{\alpha} + \frac{\nu}{\alpha^\tau}, \quad c_1 = \frac{\nu}{\alpha} - \frac{\nu}{\alpha^\tau}, \quad c_2 = -\frac{1}{\alpha} + \frac{\nu}{\alpha^\tau}$$

حال با جاگذاری در معادله شعاعی، به این نتیجه می‌رسیم که [۶]:

$$\chi''(x) + [\varepsilon' - \nu(c_0 + c_1 e^{-ax} + c_2 e^{-2ax}) - \beta_w^\tau e^{-\tau ax} + \nu \beta_w^\tau e^{-ax}] \chi(x) = 0 \quad (13)$$

در گام نهایی با معرفی تغییر متغیرها به صورت:

$$\varepsilon' - \nu c_0 = -K^\tau, \quad \nu \beta_w^\tau - \nu c_1 = \gamma_1^\tau, \quad \beta_w^\tau + \nu c_2 = \gamma_2^\tau$$

و حل معادله دیفرانسیل حاصل:

$$\chi''(x) + [-K^\tau + \gamma_1^\tau e^{-ax} - \gamma_2^\tau e^{-2ax}] \chi(x) = 0$$

که کمیت  $n$  همان عدد کوانتومی امتداد شعاعی می‌باشد. حال ابتدا با اعمال مشتقات معادله ۳، بخش زاویه‌ای معادله شرودینگر به صورت [۵]:

$$\left[ -\frac{1}{\langle \beta^\tau \rangle} \left( \frac{\partial^2}{\partial \gamma^\tau} + \tau \frac{\cos \tau \gamma}{\sin \tau \gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right) + u(\gamma) \right] \eta(\gamma) = \varepsilon_\gamma \eta(\gamma), \quad (7)$$

حاصل می‌شود. با جاگذاری  $\gamma = \pi/6$  و صفر شدن جمله دوم و البته استفاده از پتانسیل نوسان‌گر هماهنگی به صورت:

$$u(\gamma) = \frac{1}{\nu} c \left( \gamma - \frac{\pi}{6} \right)^\tau = \frac{1}{\nu} c \tilde{\gamma}^\tau \quad \text{و} \quad \tilde{\gamma} = \gamma - \frac{\pi}{6}$$

شکل معادله بخش زاویه‌ای عبارت است از:

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\gamma}^\tau} + \frac{1}{\nu} c \langle \beta^\tau \rangle \tilde{\gamma}^\tau \right] \eta(\tilde{\gamma}) = \varepsilon_\gamma \langle \beta^\tau \rangle \eta(\tilde{\gamma}), \quad (8)$$

که معادله نوسان‌گر هماهنگ بوده و ویژه مقادیر انرژی را به صورت زیر حاصل می‌نماید [۵]:

$$\varepsilon_{\tilde{\gamma}} = \sqrt{\frac{\tau c}{\langle \beta^\tau \rangle}} \left( n_{\tilde{\gamma}} + \frac{1}{\nu} \right), \quad n_{\tilde{\gamma}} = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

ویژه تابع بخش زاویه‌ای (چند جمله‌ای های هرمیت)

$$\eta_{n_{\tilde{\gamma}}}(\tilde{\gamma}) = N_{n_{\tilde{\gamma}}} H_{n_{\tilde{\gamma}}}(b \tilde{\gamma}) e^{-b \tilde{\gamma}^\tau / \nu}, \quad b = \left( \frac{c \langle \beta^\tau \rangle}{\nu} \right)^{\frac{1}{\tau}}$$

و ثابت نرمالیزاسیون آن نیز عبارتند از:

$$N_{n_{\tilde{\gamma}}} = \sqrt{\frac{b}{\sqrt{\pi} \tau^{n_{\tilde{\gamma}}} n_{\tilde{\gamma}}!}}$$

از طرفی برای بخش شعاعی،

$$\left[ -\frac{1}{\beta^\tau} \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^\tau \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\tau(\tau+3)}{\beta^\tau} + u(\beta) \right] \xi(\beta) = \varepsilon \xi(\beta), \quad (10)$$

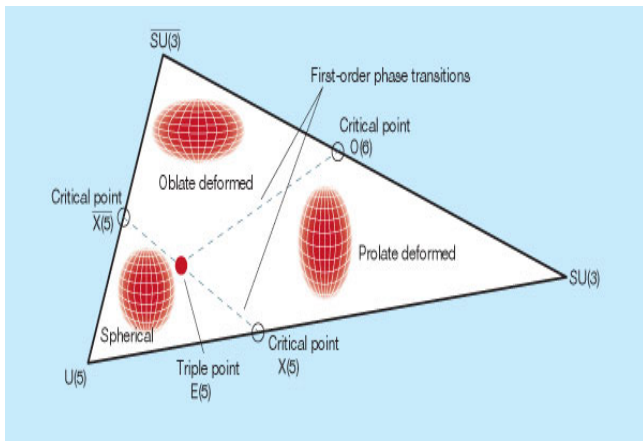
با معرفی  $\xi(\beta) = \beta^{-\tau} \chi(\beta)$  و تغییر متغیر  $\tau(\tau+3) + 2 = \nu$  شکل جدید معادله:

$$\chi''(\beta) + \left[ \varepsilon - \frac{\nu}{\beta^\tau} - u(\beta) \right] \chi(\beta) = 0, \quad (11)$$

حاصل می‌شود. ما در این مطالعه برای اولین بار از پتانسیل مورس [۶-۷]:

$$u(\beta) = e^{-\tau a(\beta - \beta_w)} - \tau e^{-a(\beta - \beta_w)}$$





شکل ۱. حدود دینامیکی و نواحی گذار مدل برهم‌کنش بوزونی [۱۸].

نقطه بحرانی بین دو حد دینامیکی  $SU(3)$  و  $SU(3)$  متناظر با حد دینامیکی  $O(6)$  در مدل برهم‌کنش بوزنی می‌باشد. از طرفی این موقعیت در قالب مدل تجمعی بوهر در چارچوب نقطه بحرانی  $Z(5)$  بررسی می‌شود. تطابق پیش‌بینی‌های این دو مدل،  $O(6)$  و  $Z(5)$ ، با استفاده از بررسی مشاهده پذیرهای مختلف مورد مطالعه قرار گرفته است. ما نیز در این مطالعه، مقایسه خود را بر اساس طیف و سطوح انرژی هسته انتخابی پیش می‌بریم. جزئیات مدل برهم‌کنش بوزونی و حدود تقارنی در مراجع ارائه شده است و ما در این جا به بیان نتایج می‌پردازیم.

هامیلتونین حد دینامیکی  $O(6)$  عبارت است از [۱۴]:

$$\hat{H} = E_0 + A\hat{C}_\nu(SO(6)) + B\hat{C}_\nu(SO(5)) + C\hat{C}_\nu(SO(3)) \quad (16)$$

با اعمال این هامیلتونین بر ویژه حالات این سیستم که بر اساس اعداد کوانتومی متناظر با عملگرهای کازیمیر<sup>۳</sup> رابطه ۷ به صورت  $|N, \sigma, \tau, \nu_\Delta, L\rangle$  تعریف می‌شود، رابطه ویژه مقداری این حد عبارت است از:

$$E = E_0 + A\sigma(\sigma+4) + B\tau(\tau+3) + CL(L+1) \quad (17)$$

در این روابط،  $N$  معرف تعداد کل بوزن‌های هسته انتخابی (نصف نوکلئون‌های بیرون لایه بسته)،  $\sigma$ ،  $\tau$  و  $L$  به ترتیب اعداد کوانتومی متناظر با گروه‌های تقارنی  $O(6)$ ،  $SO(5)$  و

با استفاده از روش ارائه شده در پیوست‌های  $C$  و  $E$  منبع [۶]، نتیجه نهایی برای رابطه ویژه مقداری بخش شعاعی به صورت زیر حاصل می‌شود [۶]:

$$\varepsilon_{n,\tau} = \frac{vc_0}{\beta_w} \left[ \frac{\gamma_1^\tau}{2\beta_w \gamma_\tau} - \left( n + \frac{1}{2} \right) \frac{\alpha}{\beta_w} \right]^\tau \quad (14)$$

انرژی ترازهای مختلف هسته‌های انتخابی از ترکیب دو معادله ۱۲ و ۱۴ حاصل می‌شود. ویژه تابع بخش شعاعی نیز با تعریف متغیر  $y = e^{-\alpha x}$  به صورت [۶]:

$$\chi_\tau(y) = y^{\frac{K}{\alpha}} e^{-\frac{\gamma_\tau}{\alpha} y} f_{n,\tau}(y)$$

که  $f_{n,\tau}(y)$  ها چند جمله‌ای‌های لاگر وابسته می‌باشند. دو ثابت  $a$  و  $\beta_w$  برای بخش شعاعی و  $c$  برای بخش زاویه‌ای نیز با انتخاب‌های متعدد چنان تنظیم می‌شوند تا میزان عدم قطعیت پیش‌بینی‌های مدل در مقایسه با نتایج تجربی:

$$\sigma = \left( \frac{1}{N} \sum_i |E_{\text{exp}}(i) - E_{\text{cal}}(i)|^2 \right)^{1/2} \quad (15)$$

به حداقل برسد. توضیحات تکمیلی در ادامه و بخش نتایج ارائه خواهد شد.

### ۲.۲ حد دینامیکی $O(6)$

مدل برهم‌کنش بوزونی در سال ۱۹۷۱ توسط یاکلو و آریما<sup>۱</sup> برای توصیف ویژگی‌های مختلف هسته‌های زوج-زوج معرفی گردید. این مدل بر پایه نظریه گروه‌ها و مجموعه عملگرهای جبری تعریف شده و در ساده‌ترین شکل تمایزی بین پروتون و نوترون قابل نمی‌شود [۱۴-۲۰]. با تعریف بوزون به صورت نصف تعداد نوکلئون‌های بیرون لایه بسته، دو بوزون  $s$  و  $d$  برای انتقال تکانه‌هایی به بزرگی ۰ و ۲ انتخاب و جبر این مدل منطبق بر گروه تقارنی  $U(6)$  حاصل می‌شود. این مدل دارای سه حد دینامیکی  $O(6)$ ،  $U(5)$  و  $SU(3)$  ( $SU(3)$ ) می‌باشد که به ترتیب برای توصیف هسته‌های کروی، تغییر شکل یافته پادمتقارن (مستقل از گاما<sup>۲</sup>) و تغییر شکل یافته محوری استفاده می‌شود. حدود دینامیکی و نقاط بحرانی نواحی گذار بین این حدود در شکل ۱ نمایش داده شده است.

3. Casimir

1. Iachello and Arima

2.  $\gamma$ -Unstable



جدول ۱. اعداد کوانتومی ترازهای انرژی مختلف هسته  $^{19}\text{Hg}$ . در بازه انرژی  $E \leq 2 \text{ MeV}$ . تعداد بوزون‌های پروتونی و نوترونی به ترتیب  $N_p = 1$  و  $N_n = 1$  می‌باشد

$\lambda$	$\nu_\Delta$	$\tau$	$\sigma$	تراز
۰	۰	۰	۱	$0_1^+$
۱	۰	۱	۱	$2_1^+$
۰	۰	۰	۳	$0_2^+$
۱	۰	۱	۳	$2_2^+$
۲	۰	۲	۳	$2_3^+$
۲	۰	۲	۳	$4_1^+$
۰	۱	۳	۳	$0_3^+$
۳	۰	۳	۳	$4_2^+$

برای محاسبه سطوح انرژی، ابتدا مقدار انتظاری عملگرهای کازیمیر هامیلتونین انتخابی را به صورت زیر محاسبه می‌نماییم:

$$\langle AC_r(O(\epsilon)) \rangle = \frac{A}{4} N(N-1) \left( \frac{1-\beta^r}{1+\beta^r} \right)^2 \quad (21)$$

$$\langle BC_r(SO(\delta)) \rangle = 2 \frac{BN\beta^r}{1+\beta^r} \quad (22)$$

$$\langle CC_r(SO(3)) \rangle = \frac{3CN\beta^r}{5(1+\beta^r)} \quad (23)$$

سطوح انرژی حاصل از این حد دینامیکی به صورت:

$$E(N, \beta, \gamma) = \frac{A}{4} N(N-1) \left( \frac{1-\beta^r}{1+\beta^r} \right)^2 + (2B + 6C) \frac{N\beta^r}{1+\beta^r} \quad (24)$$

حاصل می‌شود. از طرفی، به دلیل استقلال حد دینامیکی  $O(\epsilon)$  از متغیر زاویه‌ای  $\gamma$ ، این کمیت در رابطه دیده نمی‌شود. نکته مهم مقدار ثابت همین کمیت در مدل  $Z(\delta)$  و لذا عدم وابستگی به تغییرات آن در سطوح انرژی می‌باشد. البته برای بررسی نمایش سه‌بعدی سطوح انرژی و مقایسه نتایج مدل‌های مختلف، ما از ترکیب هامیلتونین‌های دو حد  $O(\epsilon)$  و  $SU(3)$  به صورت  $\hat{H} = \eta \hat{C}_r(SO(3)) + \delta \hat{C}_r(O(\epsilon))$  سود جست و وابستگی زاویه‌ای را به صورت زیر در سطوح انرژی وارد نمودیم [۱۴]:

$$E(N, \beta, \gamma) = \frac{A}{4} N(N-1) \left( \frac{1-\beta^r}{1+\beta^r} \right)^2 + 4\kappa N(N-1) \frac{\frac{3}{4}\beta^r - \sqrt{2}\beta^r \cos 3\gamma + 1}{(1+\beta^r)^2} \quad (25)$$

این حد دینامیکی هستند که به صورت زیر به هم مرتبط می‌شوند [۱۴]:

$$\begin{aligned} \sigma &= N, N-2, \dots, 1 \text{ or } 0 \\ \tau &= \sigma, \sigma-1, \dots, 0 \\ \tau &= 3\nu_\Delta + \lambda, \quad \nu_\Delta = 0, 1, \dots \\ L &= 2\lambda, 2\lambda-2, \dots, \lambda+1, \lambda \end{aligned} \quad (18)$$

هم  $\nu_\Delta$  هم عدد کوانتومی اضافی برای حذف تبه گنی ناشی از عدم کامل بودت تقلیل‌پذیری<sup>۱</sup> در حرکت از گروه  $SO(\delta)$  به گروه  $SO(3)$  می‌باشد. با جاگذاری اعداد کوانتومی مربوط به ترازهای مختلف هسته انتخابی و مقایسه با اطلاعات تجربی، ثابت‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  تعیین می‌شوند. کمیت  $E_0$  نیز پارامتر شیفت سر باندهای<sup>۲</sup> انرژی می‌باشد که برای ایجاد انطباق بین پیش‌بینی‌های تئوری و اطلاعات تجربی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای هسته انتخابی ما،  $^{19}\text{Hg}$ ، با تعداد کل بوزون  $N=9$ ، اعداد کوانتومی چند تراز اول در جدول ۱ نمایش داده شده است.

در گام آخر و توصیف نحوه محاسبه سطوح انرژی این هامیلتونین، حد کلاسیکی معادل با این هامیلتونین را می‌توان با در نظر گرفتن مقدار انتظاری آن نسبت به حالت همدوس [۱۸]:

$$|N, \alpha_m \rangle = (s^\dagger + \sum_m \alpha_m d_m^\dagger)^N |0 \rangle \quad (19)$$

به دست آورد که در آن،  $|0 \rangle$  حالت خلأ<sup>۳</sup> بوزونی،  $s^\dagger$  و  $d_m^\dagger$  عملگرهای بوزونی مدل انتخابی هستند. هم‌چنین، پارامتر  $\alpha_m$  را می‌توان به پارامترهای تغییرشکل جمعی به صورت  $\alpha_{\pm 1} = 0, \alpha_0 = \beta \cos \gamma$  و  $\alpha_{\pm 2} = \beta \sin \gamma / \sqrt{2}$  نسبت داد. بنابراین سطوح انرژی پتانسیل، از مقدار انتظاری هامیلتونین رابطه ۷ نسبت به حالت همدوس ۱۹، حاصل می‌شود [۲۵-۲۶]:

$$E = \frac{\langle N, \alpha_m | H | N, \alpha_m \rangle}{\langle N, \alpha_m | N, \alpha_m \rangle} \quad (20)$$

1. Reducible
2. Head-Bands
3. Vacuum State





مطابق با این نتایج، ثابت‌های موردنظر برای محاسبه ترازهای انرژی هسته  $^{190}\text{Hg}$  در قالب مدل به ترتیب  $\beta_w = 5.03$ ،  $a = 0.66$  و  $c = 7.84$  می‌باشد که کم‌ترین مقدار خطا را ایجاد می‌نمایند. برای مقایسه پیش‌بینی پتانسیل‌های متفاوت از نتایج منبع [۵] که توسط بوناتسوس و همکارانش انجام شده است، سود جسته‌ایم. آن‌ها از یک روش برازش مستقل از پارامتر (تا حد پارامتر مقیاس)<sup>۱</sup> برای تعیین طیف انرژی استفاده نموده‌اند. در این روش، انرژی ترازهای مختلف به صورت ثابت و مستقل از هسته خاص و تنها وابسته به اعداد کوانتوم معین هر تراز تعیین می‌شود. انرژی اولین تراز برانگیخته،  $2_1^+$ ، در هر هسته در مقایسه با اطلاعات تجربی، عدد بهنجارش شده ۱ فرض شده و انرژی سایر ترازها به صورت نسبتی تعیین می‌شود. افزایش خطای محاسبات در این مدل پیش‌بینی می‌شود که البته در ادامه مورد بررسی قرار می‌گیرد. هم‌چنین، برای مقایسه نتایج مدل دینامیکی  $O(6)$  با نتایج این دو پتانسیل متفاوت و بررسی میزان انطباق با آن‌ها در هسته انتخابی، با استفاده از رابطه ۱۷ و اطلاعات جدول ۱، ثابت‌های رابطه انرژی این مدل در هسته  $^{190}\text{Hg}$  به صورت  $A = 1.24 \text{ MeV}$ ،  $B = 0.85 \text{ MeV}$ ،  $C = 4.38 \text{ MeV}$  و  $E_0 = 0.47 \text{ MeV}$  حاصل گردید که از روش برازش حداقل مربعات<sup>۲</sup> در نرم‌افزار متلب<sup>۳</sup> استفاده نمودیم. نتایج دو پتانسیل متفاوت مدل  $Z(5)$  و هم‌چنین مدل  $O(6)$  در جدول ۳ فهرست شده است.

نتایج حاصل از مدل‌های مختلف در بازایی ترازهای انرژی باندهای مختلف را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی نمود:

۱. مطابق با مقادیر  $\sigma$  حاصل، نتایج حاصل از استفاده پتانسیل مورس در محاسبات مدل  $Z(5)$  در حالت کلی نتایج دقیق تری را نسبت به دو مدل دیگر، نتایج حل معادله شرودینگر با پتانسیل نامتناهی [۲۵] و پیش‌بینی‌های حد دینامیکی  $O(6)$ ، حاصل می‌نماید. می‌توان از این نتیجه برای بررسی سایر مشاهده پذیرهای هسته‌های واقع در ناحیه گذار استفاده نمود. هم‌چنین این نتیجه انتخاب پتانسیل مورس برای حل قسمت شعاعی معادله شرودینگر در نقطه بحرانی  $Z(5)$  را پیشنهاد می‌دهد.

۲. با افزایش مقدار اسپین تراز انتخابی در باند پایه، دقت نتایج حاصل از مدل  $Z(5)$  حاوی پتانسیل نامتناهی بیش‌تر می‌شود. می‌توان این نتیجه را به سهم بیش‌تر جمله شعاعی نسبت داد که در چاه پتانسیل نامتناهی غالب می‌شود.

۳. در باندهای انرژی برانگیخته، ترازهایی با برچسب بزرگ‌تر از یک، دقت بیش‌تر نتایج حاصل از پتانسیل مورس مشهود

جزئیات کامل از این روش در منابع [۱۴-۱۸] موجود بوده و ما تنها به بیان نکات کلی در این مقاله می‌پردازیم.

### ۳. نتایج

#### ۱۰.۳ طیف انرژی

هدف ما این در این مقاله بررسی توانایی مدل نقطه بحرانی  $Z(5)$  در قالب مدل تجمعی بوهر برای بررسی طیف و هم‌چنین سطوح انرژی هسته  $^{190}\text{Hg}$  با استفاده از پتانسیل‌های متفاوت برای بخش شعاعی می‌باشد. هم‌چنین میزان انطباق دو مدل  $Z(5)$  و  $O(6)$  در بازایی اطلاعات این هسته بررسی شده است. هسته  $^{190}\text{Hg}$  با نسبت انرژی  $R_{\frac{4^+}{2^+}} = 2.50$ ، کاندیدای قرار گرفتن در نقطه میانی ناحیه گذار بین هسته‌های تغییر شکل یافته کشیده و تخت می‌باشد که در دو مدل تجمعی بوهر و برهم‌کنش بوزونی، به ترتیب در چارچوب مدل‌های  $Z(5)$  و  $O(6)$  بررسی می‌شود. در ابتدا و برای تعیین ثابت‌های مربوط به روابط ۱۲ و ۱۴ از روش معرفی شده در منبع [۶] استفاده می‌نماییم. در این روش با توجه به نسبت انرژی  $R_{\frac{4^+}{2^+}}$ ، مقادیر متفاوت برای ثابت‌های  $\beta_w$  و  $a$  پیشنهاد شده و با محاسبه طیف انرژی و مقایسه آن با اطلاعات تجربی، مقدار کمیت  $\sigma$  به عنوان کیفیت فرایند برازش معرفی می‌شود. ما نیز از اعداد معرفی شده در جدول ۱ منبع [۶] برای هسته‌هایی که نسبت انرژی مشابه با هسته  $^{190}\text{Hg}$  دارند (مثل  $^{190}\text{Pt}$  و  $^{122}\text{Xe}$  و ...) استفاده نمودیم. به دلیل استقلال محاسبات مدل  $Z(5)$  از تعداد کل ذرات، استفاده از ثابت‌های هسته‌هایی با تعداد پروتون (یا نوترون) متفاوت تأثیری در نتایج ندارد. با جاگذاری در معادلات و سپس برازش به اطلاعات تجربی، ثابت  $c$  نیز تعیین گردید. با محاسبه انرژی ترازها و جاگذاری در معادله ۷، میزان خطای محاسبات به ازای هر مجموعه از ثابت‌ها در جدول ۲ فهرست شده است.

جدول ۲. ثابت‌های موجود در مدل  $Z(5)$  با استفاده از پتانسیل مورس برای هسته  $^{190}\text{Hg}$ . اطلاعات تجربی از منبع [۲۷] استخراج شده است

$\sigma$	$c$	$a$	$\beta_w$
۶۲	۷٫۸۴	۰٫۶۶	۵٫۰۳
۶۶	۷٫۶۴	۰٫۳۵	۵٫۰۸
۷۱	۷٫۱۹	۰٫۷۵	۵٫۴۵
۹۱	۷٫۰۳	۰٫۷۷	۵٫۵۸
۸۲	۶٫۷۵	۰٫۱۹	۵٫۴۰
۶۹	۷٫۲۷	۰٫۲۴	۵٫۱۲

1. Parameter Free (up to Scale Factor)

2. Least Square Fit

3. Matlab Software



## ۲.۳ سطوح انرژی

سطوح انرژی پتانسیل<sup>۲</sup> روشی هندسی برای بررسی شکل هسته های مختلف می باشند. وجود شکل های مختلف معیاری برای ارزیابی موقعیت هسته های مورد مطالعه می باشد. بر اساس نتایج مطالعات مختلف، سطوح انرژی هسته های کروی، متناسب با حد دینامیکی  $U(\delta)$  مدل برهم کنش بوزونی، دارای یک کمینه مطلق می باشد. این در حالی است که هسته های تغییر شکل یافته پادمتقارن، متناسب با حد دینامیکی  $O(6)$  مدل برهم کنش بوزونی، دارای دو کمینه هستند [۲۵-۲۶].

ما با استفاده از ویژه توابع بخش های شعاعی حاصل از حل تحلیلی معادله بوهر در نقطه بحرانی  $Z(\delta)$  با استفاده از دو پتانسیل چاه نامتنه ای و مورس، سطوح انرژی پتانسیل هسته انتخابی را رسم نمودیم. با توجه به مقدار ثابت متغیر زاویه ای در محاسبات ما،  $\gamma = \pi/6$ ، به جای استفاده از سطوح سه بعدی، از نمودارهای معرف تغییرات انرژی برحسب متغیر شعاعی  $\beta$  استفاده نمودیم. هم چنین در خصوص پیش بینی سطوح انرژی بر اساس حد دینامیکی  $O(6)$ ، به جای استفاده از معادله ۲۵، با بررسی وابستگی زاویه ای، از رابطه ۲۴ استفاده نمودیم. در خصوص مدل  $Z(\delta)$  دارای پتانسیل چاه نامتنه ای نیز از نتایج منبع [۵]، رابطه ۱۱، استفاده نموده و در نهایت سطوح انرژی پتانسیل برای هسته  $^{190}\text{Hg}$  حاصل گردید که در شکل ۲ نمایش داده شده است.

وجود دو کمینه در هر سه شکل، معرف موفقیت مدل ها در توصیف سطوح پتانسیل هسته انتخابی می باشد. فضای بین دو کمینه قله مرتفع تری را برای سطوح انرژی ناشی از چاه نامتنه ای نشان می دهد. این نتیجه را می توان بر اساس پیش بینی های بزرگ تر چاه پتانسیل نامتنه ای برای ترازهای انرژی باندهای برانگیخته توجیه نمود [۲۸-۳۱]. بررسی انطباق نتایج این مطالعه برای ترازها و سطوح انرژی و هم چنین احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی با اطلاعات تجربی متناظر، پیشنهاد هسته  $^{190}\text{Hg}$  برای قرار گرفتن در نقطه بحرانی  $Z(\delta)$  و لذا ناحیه گذار فازی شکلی بین حدود تخت و کشیده را نشان می دهد.

است. این دقت را می توان بر اساس ناتوانی پتانسیل چاه نامتنه ای برای تمایز بین باندهای مختلف انرژی نسبت داد که این مشکل در پتانسیل مورس و اعداد کوانتومی موجود در آن حل شده است.

۴. در باندهای انرژی برانگیخته، دقت نتایج مدل دینامیکی  $O(6)$  در مقایسه با مدل  $Z(\delta)$  کاهش قابل توجهی نشان می دهد. این نتیجه را می توان به مشاهده ترازهای باندهای برانگیخته در بین ترازهای باند پایه که نشانه ای از پدیده ترکیب تقارن ها<sup>۱</sup> می باشد، نسبت داد. در مدل های جبری، برای مطالعه چنین شرایطی باید از ترکیب چند حد دینامیکی استفاده نمود و هامیلتونین های مبتنی بر یک حد دینامیکی در چنین شرایطی موفق عمل نمی نمایند.

۵. با مطالعه نسبت انرژی ترازهای مختلف، به خصوص در باند پایه، انطباق پیش بینی های مدل  $Z(\delta)$  با پتانسیل مورس و حد دینامیکی  $O(6)$  مشاهده می شود.

جدول ۳. مقایسه نتایج مدل  $Z(\delta)$  با دو پتانسیل مورس (Morse) و چاه نامتنه ای (inf.) و مدل دینامیکی  $O(6)$  برای ترازهای انرژی هسته  $^{190}\text{Hg}$ . تمام اعداد برحسب MeV می باشد. اطلاعات تجربی، Exp. از منبع [۲۵] استخراج شده است.

تراز	Exp.	$Z(\delta)$ inf.	$Z(\delta)$ Morse	$O(6)$
$0_1^+$	۰	۰	۰	۰
$2_1^+$	۰٫۴۱۶	۰٫۴۳۵	۰٫۴۲۱	۰٫۴۲۰
$4_1^+$	۱٫۰۴۲	۱٫۰۵۵	۱٫۰۴۹	۱٫۰۴۶
$2_2^+$	۱٫۱۰۰	۱٫۱۵۷	۱٫۱۲۹	۱٫۱۱۸
$0_2^+$	۱٫۲۷۹	۱٫۳۱۷	۱٫۳۰۱	۱٫۲۸۸
$2_3^+$	۱٫۵۵۹	۱٫۵۸۶	۱٫۵۷۴	۱٫۵۹۴
$2_4^+$	۱٫۵۷۱	۱٫۶۰۷	۱٫۵۹۵	۱٫۶۱۳
$3_1^+$	۱٫۶۵۷	۱٫۶۸۸	۱٫۶۸۴	۱٫۶۷۰
$6_1^+$	۱٫۷۷۳	۱٫۷۹۵	۱٫۷۹۹	۱٫۷۹۱
$4_2^+$	۱٫۹۷۵	۲٫۰۱۶	۱٫۹۹۶	۱٫۹۸۲
$4_3^+$	۲٫۱۶۳	۲٫۱۸۴	۲٫۱۷۷	۲٫۱۹۰
$5_1^-$	۲٫۲۰۱	۲٫۲۱۹	۲٫۲۱۱	۲٫۲۰۸
$6_2^+$	۲٫۵۱۰	۲٫۵۸۶	۰٫۵۴۵	۲٫۵۲۶
$8_1^+$	۲٫۵۷۳	۲٫۵۹۱	۲٫۶۰۲	۲٫۵۹۴
$10_1^-$	۲٫۵۹۷	۲٫۶۳۴	۲٫۷۴۴	۲٫۶۴۱
$12_1^+$	۲٫۶۲۱	۲٫۶۴۵	۲٫۶۵۹	۲٫۶۳۱
$14_1^+$	۲٫۰۴۱	۲٫۰۶۵	۲٫۱۰۵	۲٫۰۶۹
$10_2^-$	۲٫۲۱۳	۲٫۲۴۷	۲٫۲۲۵	۲٫۲۴۰
$12_2^+$	۲٫۲۷۷	۲٫۳۱۵	۲٫۳۰۶	۲٫۳۵۵
$10_3^-$	۲٫۳۵۰	۲٫۳۷۸	۲٫۳۶۱	۲٫۴۰۲
$14_2^+$	۲٫۴۴۶	۲٫۴۶۵	۲٫۴۹۸	۲٫۴۵۵
$16_1^+$	۲٫۷۰۳	۲٫۷۱۸	۲٫۷۲۹	۲٫۷۱۴
$14_3^+$	۲٫۷۴۴	۲٫۷۹۵	۲٫۷۵۵	۲٫۷۵۲
$13_1^+$	۲٫۹۵۱	۲٫۹۷۴	۲٫۹۸۶	۲٫۹۶۴
$\sigma$		۳۹۸	۲۶۴	۲۸۸





حاصل می‌شود. حال با محاسبه مقدار چشم‌داشتی این عملگر بر روی تابع موج ترازهای انتخابی، احتمال گذار چهار قطبی الکتریکی در قالب مدل  $Z(\Delta)$  عبارت است از:

$$B(E\gamma; L_i \rightarrow L_f) = \frac{\Delta \left| \langle L_f || T^{(E\gamma)} || L_i \rangle \right|^2}{16\pi (2L_i + 1)} \quad (28)$$

برای تعیین نتایج مدل  $Z(\Delta)$  برای هسته  $^{190}\text{Hg}$ ، علاوه بر مقادیر چشم‌داشتی عملگر  $2\gamma$ ، ثابت‌های رابطه نیز در مقایسه با مقادیر تجربی و با استفاده از برازش حداقل مربعات به صورت  $t = 1/212$  و  $I_\beta = 0.107$  (هر دو برحسب واحد وایسکوف  $(W.u)$ ) حاصل گردید. نتایج حاصل از مدل  $Z(\Delta)$  و مقادیر تجربی متناظر برای گذارهای مختلف چهار قطبی الکتریکی در جدول ۴ ذکر شده است.

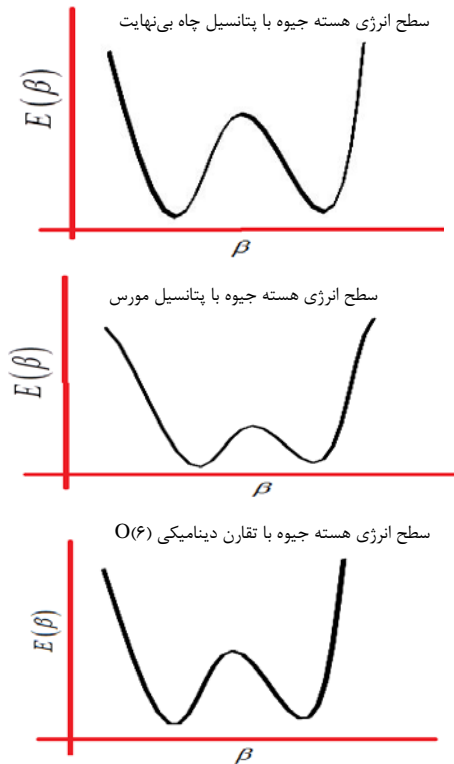
نتایج حاصل، انطباق پیش‌بینی‌های مدل  $Z(\Delta)$  با نتایج تجربی موجود برای احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی را نشان می‌دهد. این نتیجه، علاوه بر تأیید فرایند برازش و تعیین پارامترهای مدل، پیش‌بینی این مقاله مبنی بر انطباق هسته  $^{190}\text{Hg}$  با حد دینامیکی  $Z(\Delta)$  را تأیید می‌نماید. این نتیجه در کنار نتیجه حاصل از مقایسه ترازهای انرژی و سطوح انرژی هسته انتخابی، قرار گرفتن هسته  $^{190}\text{Hg}$  در ناحیه گذار فازی- شکلی بین حدود تغییر شکل یافته تخت و کشیده را نشان می‌دهد.

جدول ۴. پیش‌بینی‌های مدل  $Z(\Delta)$  و مقادیر تجربی متناظر برای گذارهای مختلف هسته  $^{190}\text{Hg}$ . تنها آن دسته از گذارها که اطلاعات تجربی [۲۷] قابل دسترس دارند، گزارش شده‌اند.

گذار	مقدار تجربی	$Z(\Delta)$
$2_1^+ \rightarrow 0_1^+$	۴۵٫۰۰	۴۷٫۴۵
$4_1^+ \rightarrow 2_1^+$	۱۸٫۰۰	۱۵٫۸۰
$6_1^+ \rightarrow 4_1^+$	۵٫۹۰	۵٫۳۲
$12_1^+ \rightarrow 10_1^+$	۹٫۴۰	۹٫۰۸

#### ۴. بحث و نتیجه‌گیری

ترازها و سطوح انرژی هسته  $^{190}\text{Hg}$  در قالب حد دینامیکی  $O(6)$  مدل برهم‌کنش بوزونی و نقطه بحرانی  $Z(\Delta)$  مدل تجمعی بوهر مورد مطالعه قرار گرفت. از دو پتانسیل متفاوت جاه نامتناهی و مورس برای محاسبه ویژه مقادیر انرژی استفاده گردید. معادلات بخش شعاعی با استفاده از روش تکرار مجانبی حل شده و ثابت‌های مدل‌های انتخابی در مقایسه با اطلاعات تجربی با استفاده از برنامه متلب برازش گردید. نتایج حاصل مزیت‌های پتانسیل مورس را برای محاسبه انرژی ترازهای باندهای برانگیخته نشان داد. در مقابل، جاه پتانسیل نامتناهی در توصیف انرژی ترازهایی با اسپین  $J > 10$  موفق‌تر عمل می‌نماید. مقایسه پیش‌بینی‌های دو مدل  $Z(\Delta)$  و  $O(6)$  برای نسبت



شکل ۲. سطوح انرژی پتانسیل هسته  $^{190}\text{Hg}$  با استفاده از سه مدل انتخابی.

#### ۳.۳ احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی

احتمال گذارهای چند قطبی الکترومغناطیسی بین ترازهای مختلف سیستم‌های هسته‌ای به عنوان کمیت‌هایی وابسته به ساختار تابع موج و عملگر گذار شناخته می‌شوند. مطالعه این کمیات، اطلاعات اساسی در خصوص ساختار سیستم‌های هسته‌ای تولید می‌کند. برای بررسی انطباق هسته  $^{190}\text{Hg}$  با تقارن‌های نقطه بحرانی  $Z(\Delta)$ ، احتمال گذارهای چهار قطبی الکتریکی شناخته شده این هسته در قالب مدل مطالعه گردید. عملگر گذار چهار قطبی الکتریکی،  $E2$ ، در این مدل عبارت است از [۵]:

$$T_\mu^{(E\gamma)} = t\beta \left[ D_{\mu,0}^{(\gamma)}(\theta_i) \cos\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} (D_{\mu,2}^{(\gamma)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(\gamma)}(\theta_i)) \sin\left(\gamma - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \quad (26)$$

در این رابطه  $t$  یک ثابت اسکالر برای انطباق نتایج تئوری و تجربی و  $D_{\mu,\nu}^{(\gamma)}(\theta_i)$  معرف توابع ویگنر حاصل از حل معادله شرودینگر می‌باشند که وابستگی دورانی توابع موج هسته را توصیف می‌نمایند. با در نظر گرفتن شرایط هسته انتخابی ما، یعنی  $\gamma \approx \pi/6$ ، شکل ساده‌تر عملگر گذار چهار قطبی الکتریکی به صورت:

$$T_\mu^{(E\gamma)} = -\frac{1}{\sqrt{2}} t\beta (D_{\mu,2}^{(\gamma)}(\theta_i) + D_{\mu,-2}^{(\gamma)}(\theta_i)) \quad (27)$$



13. J.P. Elliott, *Collective motion in the nuclear shell model. I. Classification schemes for states of mixed configurations*, *Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A*, **245**, 128 (1958).
14. F. Iachello, A. Arima, *The Interacting Boson Model*, (Cambridge U. Press, Cambridge, 1987).
15. R.F. Casten, D.D. Warner, *The interacting boson approximate*, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 389 (1988).
16. R.F. Casten, N.V. Zamfir, *Empirical Realization of a Critical Point Description in Atomic Nuclei*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 052503 (2001).
17. G. Thiamova, D.J. Rowe, J.L. Wood, *Coupled-SU(3) models of rotational states in nuclei*, *Nuclear Phys. A*, **780**, 112 (2006).
18. H. Fathi, et al., *Investigation of shape phase transition in the U(5) - SO(6) transitional region by catastrophe theory and critical exponents of some quantities*, *Int. J. Mod. Phys. E* **23**, 1450045 (2014).
19. A.E.L. Dieperink, O. Scholten, F. Iachello, *Classical Limit of the Interacting-Boson Model*, *Phys. Rev. Lett.* **44**, 1747 (1980).
20. D.J. Rowe, *A computationally tractable version of the collective model*, *Nucl. Phys. A*, **735**, 372 (2004).
21. H. Ciftci, R.L. Hall, N. Saad, *Asymptotic iteration method for eigenvalue problems*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **36**, 11807 (2003).
22. Nasser Saad, Richard L Hall, Hakan Ciftci, *Criterion for polynomial solutions to a class of linear differential equations of second order*, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39**, 13445 (2006).
23. C.L. Pekeris, *The Rotation-Vibration Coupling in Diatomic Molecules*, *Phys. Rev.* **45**, 98 (1934).
24. C. Berkdemir, J. Han, *Any l-state solutions of the Morse potential through the Pekeris approximation and Nikiforov-Uvarov method*, *Chem. Phys. Lett.* **409**, 203 (2005).
25. M.A. Caprio, *Effects of  $\beta$ - $\gamma$  coupling in transitional nuclei and the validity of the approximate separation of variables*, *Phys. Rev. C* **72**, 054323 (2005).
26. L. Fortunato, A. Vitturi, *New analytic solutions of the collective Bohr Hamiltonian for a  $\beta$ -soft,  $\gamma$ -soft axial rotor*, *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **30**, 627 (2004).
27. Balraj Singh, Jun Chen, *Nuclear Data Sheets A = 200*, *Nucl. Data Sheets*, **169**, 1 (2020).
28. M. Seidi, H. Sabri, *The  $^{116}\text{Te}$  nucleus as candidate for U(5) dynamical symmetry*, *Acta Phys. Pol. B*, **51**, 2139 (2020).
29. D. Bonatsos, et al, *Exactly separable version of the Bohr Hamiltonian with the Davidson potential*, *Phys. Rev. C*, **76**, 064312 (2007).
30. Z. Podolyak, *Prolate-oblate shape transition in heavy neutron-rich nuclei*, *Journal of Physics: Conference Series*, **381**, 012052 (2012).
31. J. Jolie, A. Linnemann, *Prolate-oblate phase transition in the Hf-Hg mass region*, *Phys. Rev. C* **68** 031301(R)(2007).

ترازهای انرژی در باند پایه تطابق این دو مدل را به خوبی نشان می‌دهد. کاهش نسبی کارایی مدل‌های انتخابی در توصیف انرژی ترازهای باندهای برانگیخته، ایده استفاده از چند نوع پتانسیل یا ترکیب چند تقارن دینامیکی برای توصیف کامل سیستم را تقویت می‌نماید. می‌توان از این مطالعه برای بررسی هسته‌های نزدیک به لایه بسته  $Z = 82$  و هم‌چنین پتانسیل‌های مختلف در بخش شعاعی معادله بوهر استفاده نمود که در مطالعات بعدی، مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

### تشکر و قدردانی

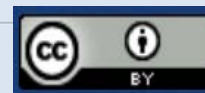
این مطالعه با پشتیبانی مالی مدیریت امور پژوهشی دانشگاه ایلام و هم‌چنین دانشگاه تبریز انجام گردیده است.

### مراجع

1. A. Bohr, B.R. Mottelson, *Nuclear Structure*, **II**, Benjamin, New York, (1975).
2. R.K. Sheline, *Vibrational states in deformed even-even nuclei*, *Rev. Mod. Phys.* **32**, 1 (1960).
3. W. Greiner, J.A. Maruhn, *Nuclear Models*, Springer, Berlin, (1996).
4. F. Iachello, *Analytic description of critical point nuclei in a spherical-axially deformed shape phase transition*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 052502 (2001).
5. Dennis Bonatsos, et. al, *Z(5): critical point symmetry for the prolate to oblate nuclear shape phase transition*, *Phys. Lett. B*, **588**, 172 (2004).
6. I. Boztosun, D. Bonatsos, I. Inci, *Analytical solutions of the Bohr Hamiltonian with the Morse potential*, *Phys. Rev. C*, **77**, 044302 (2008).
7. G. Chen, *The exact solutions of the Schrödinger equation with the Morse potential via Laplace transforms*, *Phys. Lett. A*, **326**, 55 (2004).
8. I. Inci, I. Boztosun, D. Bonatsos, *The Bohr Hamiltonian Solution with the Morse Potential for the  $\gamma$ -unstable and the Rotational Cases*, *AIP Conference Proceedings*, **1072**, 219 (2008).
9. I. Inci, I. Boztosun, D. Bonatsos, *Electric quadrupole transitions of the Bohr Hamiltonian with the Morse potential*, *Phys. Rev. C*, **84**, 024309 (2011).
10. I. Inci, *Exactly separable Bohr Hamiltonian with the Morse potential for triaxial nuclei*, *Int. J. Mod. Phys. E*, **23**, 1450053 (2014).
11. I. Inci, *Investigation of  $\gamma$ -unstable odd-even nuclei in the Collective model framework with the Morse potential*, *Nuclear Phys. A*, **991**, 121611 (2019).
12. L. Fortunato, A. Vitturi, *Analytically solvable potentials for  $\gamma$ -unstable nuclei*, *J. Phys. G, Nucl. Part. Phys.* **29**, 1341 (2003).

#### COPYRIGHTS

©2021 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.



استناد به این مقاله

مسعود صیدی، هادی صبری، روح‌الله غلامی (۱۴۰۱). حل هامیلتونین بوهر در نقطه بحرانی  $Z(\delta)$  با استفاده از پتانسیل مورس برای هسته  $^{196}\text{Hg}$ . ۶۱-۷۰

DOR: 20.1001.1.17351871.1401.43.2.7.2

Url: [https://jonsat.nstri.ir/article\\_1384.html](https://jonsat.nstri.ir/article_1384.html)

