



آنتروپی درهم‌تنیدگی در تقریب نیمه‌کلاسیک به عنوان مشاهده‌پذیر بررسی گذار فازی شکلی در هسته‌ها

مریم قپانوری^{۱*}، محمدعلی جعفریزاده^۲، مسعود صیدی^۳، نرجس امیری^۴

۱. پژوهشکده پلاسما و گداحت هسته‌ای، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۱۴۳۹۹-۵۱۱۱۳، تهران- ایران

۲. گروه نظری، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، صندوق پستی: ۵۱۶۶۴، تبریز- ایران

۳. گروه فیزیک، دانشکده فیزیک، دانشگاه ایلام، صندوق پستی: ۶۹۳۱۵-۵۱۶، ایلام- ایران

۴. گروه هسته‌ای، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، صندوق پستی: ۵۱۶۶۴، تبریز- ایران

*Email: maryamghapanvari@yahoo.com

مقاله پژوهشی

تاریخ دریافت مقاله: ۱۴۰۲/۴/۲۵ تاریخ بازنگری مقاله: ۱۴۰۲/۷/۳۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۸/۶

چکیده

در این مقاله، گذار فاز کوانتومی و ساختار هسته بر مبنای میزان درهم‌تنیدگی کوانتومی مورد بررسی قرار گرفت. یکی از کمیت‌هایی که برای اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی بین دو جسم استفاده می‌شود، آنتروپی فون نویمان است که به عنوان معیاری مناسب برای بررسی درهم‌تنیدگی بین دو حالت در نظر گرفته شد. آنتروپی درهم‌تنیدگی بوزون‌های s-d در چارچوب مدل اندرکنش بوزونی IBM و با استفاده از فرمالیسم سازگار Q و تقریب نیمه‌کلاسیک بررسی شد. این تحقیق یک روش برای استخراج آنتروپی درهم‌تنیدگی در حدود تقارن دینامیکی IBM از جمله مناطق گذار بین شکل‌های مختلف را ارائه می‌کند. با استفاده از اثر درهم‌تنیدگی، به توصیف گذار فاز کوانتومی پرداخته و رفتار درهم‌تنیدگی بوزون‌های s و d در مناطق مختلف مثلث کاستن بررسی شد. نحوه تعیین آنتروپی در مدل IBM با استفاده از تقریب نیمه‌کلاسیکی ارائه شد. نتایج نشان داد که مقادیر آنتروپی درهم‌تنیدگی به تغییر فاز حساس بوده و می‌تواند یک ابزار قدرتمند برای تشخیص انتقال فاز کوانتومی در هسته‌ها باشد.

کلیدواژه‌ها: گذر فاز کوانتومی، درهم‌تنیدگی کوانتومی، مدل اندرکنش بوزونی (IBM)، آنتروپی، تقریب نیمه‌کلاسیکی

Entanglement entropy in the semi-classical approximation as an observable for investigating shape phase transition in nuclei

M. Ghapanvari^{*1}, M.A. Jafarizadeh², M. Seidi³, N. Amiri⁴

1. Plasma and Nuclear Fusion Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOL, P.O. Box: 14399-51113, Tehran – Iran

2. Theoretical Group, Faculty of Physics, Tabriz University, P.O. Box: 51664, Tabriz – Iran

3. Department of Physics, Faculty of Sciences, Ilam University, P.O.Box: 69315-516, Ilam – Iran

4. Nuclear Group, Faculty of Physics, Tabriz University, P.O. Box: 51664, Tabriz – Iran

Research Article

Received: 16.7.2023, Revised: 22.10.2023, Accepted: 28.10.2023

Abstract

In this paper, quantum phase transitions and nuclear structure were investigated based on quantum entanglement. One of the measures for entanglement between two bodies is the von Neumann entropy, which is considered a suitable criterion for examining entanglement. The entanglement entropy of s-d bosons within the framework of the Interacting Boson Model (IBM) is investigated using the consistent-Q formalism and semiclassical approximation. This research presents a method for deriving the entanglement entropy in the dynamical symmetry limits of the IBM, including transition regions between different shapes. By utilizing the entanglement effect, the quantum phase transition was described, and the entanglement behavior of s and d bosons was investigated in various regions of the Castan triangle. A method for determining entropy in the IBM model using the semiclassical approximation was presented. The results showed that entanglement entropy values are sensitive to phase changes and can be a powerful tool for detecting quantum phase transitions in nuclei.

Keywords: Quantum phase transition, Quantum entanglement, Boson interaction model (IBM), Entropy, Semi-classical approximation



۱. مقدمه

یکی از عناصر اساسی علم اطلاعات کوانتومی، درهم‌تنیدگی کوانتومی^۱ است. درهم‌تنیدگی کوانتومی یک پدیده فیزیکی است که وقتی اتفاق می‌افتد که یک جفت یا گروهی از ذرات طوری با هم اندرکنش داشته باشند که حالت کوانتومی هر ذره نتواند به طور مستقل از ذرات دیگر توصیف شود. چنین پدیده‌ای موضوع مورد مطالعه اینشتین^۲، پودولسکی^۳ و روزن^۴ در سال ۱۹۳۵ بوده است [۱]. حالت‌های درهم‌تنیده کوانتومی نقش کلیدی در فرایندهای اطلاعات کوانتومی مثل انتقال از راه دور کوانتومی^۵ [۲]، رمزنگاری کوانتومی^۶ [۳] و محاسبات کوانتومی^۷ [۴] بازی می‌کنند. درهم‌تنیدگی کوانتومی اساس نظریه اطلاعات کوانتومی و منبع اساسی برای آثار کوانتومی محسوب می‌شود. تعیین مقدار درهم‌تنیدگی حالت آمیخته بس‌ذره‌ای یک مسئله چالش برانگیز است. اخیراً تحقیقات زیادی بر روی مباحث درهم‌تنیدگی انجام شده است. درهم‌تنیدگی کوانتومی یک پدیده غیرکلاسیکی است که از همبستگی کوانتومی بین زیر سیستم‌های جدا از هم ناشی می‌شود و در سال‌های اخیر درهم‌تنیدگی کوانتومی در فرایندهای اطلاعات کوانتومی نقش وسیعی را ایفا کرده است. یکی از اهداف بزرگ نظریه اطلاعات کوانتومی مطالعه و درک خواص درهم‌تنیدگی سیستم‌های بس‌ذره‌ای است. این خواص می‌تواند منبع مناسبی برای محاسبات و ارتباطات کوانتومی باشد.

به‌تازگی تئوری اطلاعات کوانتومی نگرش جدیدی را برای مشاهده و مطالعه سیستم‌های هسته‌ای درهم‌تنیده مانند هسته‌ها که به عنوان یک سیستم بس‌ذره در نظر گرفته می‌شود را فراهم می‌کند [۵]. استفاده از اطلاعات کوانتومی در سیستم‌های هسته‌ای فرصت‌های جدید جالب توجهی را برای درک و تفسیر پدیده اندرکنش قوی فراهم می‌کند [۶]. اگر بین نوکلئون‌ها در یک هسته هیچ همبستگی وجود نداشته باشد، همه نوکلئون‌ها مانند ذرات مستقل رفتار می‌کنند و هسته یک حالت غیرهمبسته با سطح فرمی مشخص است که می‌توان آن را با تابع موج دترمینان اسلاتر^۸ نوشت [۷]. مسئله هسته‌ای بس‌ذره‌ای [۸] یک چالش اساسی برای نظریه فیزیک هسته‌ای است. توسعه الگوریتم‌های کوانتومی جدید که برای مسئله

هسته‌ای بس‌ذره‌ای کاربرد دارند، هم‌اکنون در فیزیک هسته‌ای در حال انجام است [۹-۱۷]. درهم‌تنیدگی در سیستم‌های هسته‌ای و فرایندهای هسته‌ای مانند شکافت و غیره در حال بررسی است [۱۸، ۱۹].

انتقال فاز کوانتومی (QPT^۹) در سیستم‌های هسته‌ای در ارتباط با درهم‌تنیدگی، اخیراً مورد مطالعه قرار گرفته است [۲۰-۲۹]. برای مشخص کردن ویژگی‌های سیستم، باید یک پارامتر نظم را معرفی کرد. درهم‌تنیدگی به عنوان یکی از جالب‌ترین ویژگی‌های نظریه کوانتومی، می‌تواند به عنوان یک پارامتر نظم در سیستم‌های هسته‌ای در نظر گرفته شود. بنابراین، اندازه‌گیری آن برای انتقال فاز کوانتومی مهم است. یکی از بهترین اندازه‌گیری‌ها برای درهم‌تنیدگی کوانتومی در سیستم‌های فیزیکی، آنتروپی نویمان است [۳۰-۳۳].

در این مقاله، با توجه به اهمیت سیستم‌های هسته‌ای و موضوعات اطلاعات کوانتومی، درهم‌تنیدگی کوانتومی را مطالعه می‌کنیم. یکی از اهداف ما مطالعه انتقال فاز کوانتومی و ساختار هسته براساس درجه درهم‌تنیدگی است که از تقریب نیمه‌کلاسیک در IBM^{۱۰} استفاده کردیم. با استفاده از اثر درهم‌تنیدگی، انتقال فاز کوانتومی را شناسایی و توصیف می‌کنیم و رفتار درهم‌تنیدگی را در کل نقاط مثلث تقارنی کاستن بررسی می‌کنیم. در این مقاله، یک تحلیل سیستماتیک از نحوه تغییرات آنتروپی درهم‌تنیدگی بوزون‌های s و d در مناطق انتقالی مختلف در مثلث کاستن با استفاده از تقریب نیمه‌کلاسیک انجام می‌گیرد. ما بر روی نحوه تغییرات آنتروپی درهم‌تنیدگی بوزون‌های s و d که در مناطق گذار $U(5)-SU(3)$ ، $U(5)-SO(6)$ و $SU(3)-\overline{SU}(3)$ در داخل مثلث کاستن تمرکز خواهیم کرد.

۲. چارچوب تئوری کار

سه الگوی معروف برای هسته‌های زوج-زوج جمعی وجود دارد که هسته‌ها را نه تنها در حالت حرکت تک نوکلئونی بلکه برحسب نوسانات و چرخش‌های چند نوکلئونی توصیف می‌کنند [۳۳]. این سه الگو عبارتند از: مدل ارتعاشی، چرخنده متقارن و چرخنده پاد متقارن محوری. این مدل‌ها را می‌توان در مثلث تقارن کاستن شرح داد. هر کدام از این تقارن‌ها یک خصوصیت مشخص دارند و در اصل هر حرکت جمعی یک هسته را می‌توان به منطقه‌ای در این مثلث

1. Quantum Entanglement
2. Einstein
3. Polodolsky
4. Rosen
5. Quantum Teleportation
6. Quantum Cryptography
7. Quantum Computation
8. Slater

9. Quantum Phase Transition

10. Interacting Boson Model



طیف انرژی هامیلتونین رابطه ۱ در چارچوب تقریب نیمه کلاسیکی به کمک حالات همدوس عبارت است از [۳۴]:

$$E(N_B, \beta, \gamma) = \langle N_B, \beta, \gamma | \hat{H}(\eta, \chi) | N_B, \beta, \gamma \rangle = -\Delta(1-\eta) + \frac{1}{(1+\beta^2)^2} \{ [N_B \eta - (1-\eta)(\epsilon N_B + \chi^2 - \lambda)] \beta^2 + [N_B \eta - (1-\eta)(\frac{\sqrt{2} N_B + \Delta}{\gamma} \chi^2 - \epsilon)] \beta^2 + [\epsilon \sqrt{\frac{2}{\gamma}} N_B (1-\eta) \chi] \beta^2 \cos^2 \gamma \} \quad (2)$$

پارامتر شعاعی β مقیاسی از میزان و اندازه تغییر شکل است و پارامتر زاویه‌ای γ انحراف از تقارن محوری را نشان می‌دهد. برای سادگی ضرایب رابطه ۲ را برحسب پارامتر β مرتب می‌کنیم، بنابراین حاصل می‌شود [۳۴]:

$$E(N_B, \beta, \gamma) = -\Delta(1-\eta) + \frac{1}{(1+\beta^2)^2} [A\beta^2 + B\beta^2 + C\beta^2 \cos^2 \gamma] \quad (3)$$

که در آن ضرایب A ، B و C عبارتند از:

$$A = [N_B \eta - (1-\eta)(\epsilon N_B + \chi^2 - \lambda)]$$

$$B = [N_B \eta - (1-\eta)(\frac{\sqrt{2} N_B + \Delta}{\gamma} \chi^2 - \epsilon)]$$

$$C = [\epsilon \sqrt{\frac{2}{\gamma}} N_B (1-\eta) \chi]$$

مهم‌ترین چیز برای محاسبه آن‌تروپی درهم‌تنیدگی در تقریب نیمه کلاسیک حالت سیستم می‌باشد که به کمک فرمالیسم حالت‌های همدوس به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$|N_B, \beta, \gamma\rangle = |\psi_{\beta, \gamma}(N_B)\rangle = \theta(B^+)^{N_B} |0\rangle \quad (4)$$

که در آن پارامترهای B^+ و θ عبارتند از:

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{N_B! (1+\beta^2)^{N_B}}}$$

$$B^+ = s^+ + \beta(\cos \gamma d_0^+ + \frac{\sin \gamma}{\sqrt{2}}(d_1^+ + d_{-1}^+))$$

$$= \alpha_s s^+ + \alpha_{d_0} d_0^+ + \alpha_{d_1} d_1^+ + \alpha_{d_{-1}} d_{-1}^+$$

$$\alpha_s = 1, \alpha_{d_0} = \beta \cos \gamma, \alpha_{d_1} = \alpha_{d_{-1}} = \frac{\beta \sin \gamma}{\sqrt{2}}$$

به سادگی می‌توان نشان داد:

$$B^{+N_B} = \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} \delta_{N_B, l_1 + l_2 + l_3 + l_4} \frac{N_B!}{l_1! l_2! l_3! l_4!} \alpha_s^{l_1} \alpha_{d_0}^{l_2} \alpha_{d_1}^{l_3} \alpha_{d_{-1}}^{l_4} s^{+l_1} d_0^{+l_2} d_1^{+l_3} d_{-1}^{+l_4}$$

$$|\psi_{\beta, \gamma}(N_B)\rangle = \sum_{l_1, l_2, l_3, l_4} \delta_{N_B, l_1 + l_2 + l_3 + l_4} \eta_{l_1, l_2, l_3, l_4} |l_1\rangle_s |l_2\rangle_{d_0} |l_3\rangle_{d_1} |l_4\rangle_{d_{-1}}$$

منسوب کرد. نقاط سرتاسر مثلث مطابق با شکل‌ها و ساختارهای متفاوت هندسی هسته‌ها هستند که می‌توانند مسیری از تغییر شکل از کروی به تغییر شکل یافته را نشان دهند. تمرکز ما بر روی مناطقی از مثلث است که در آنها چنین تغییر شکل‌هایی اتفاق می‌افتد. در واقع جایی که گذار فاز کوانتومی به عنوان تابعی از تعداد نوترون‌ها (N) و عدد اتمی (Z) رفتار می‌کند [۳۳-۳۴]. تقارن‌های دینامیکی در لبه‌های مثلث کاستن قرار دارد و سه منطقه متناظر با تغییر شکل‌های کروی، کشیده و پخت نیز در شکل ۱ نشان داده شده است.

در شکل ۱ که به آن مثلث کاستن توسعه یافته می‌گویند، پارامترهای مدل IBM که فضای پارامترها را تشکیل می‌دهند، η و χ هستند. تقارن‌های مدل IBM و مناطق گذار بین آنها به همراه مقادیر متناظر پارامترهای η و χ در مثلث کاستن توسعه یافته شکل ۱ نشان داده شده است.

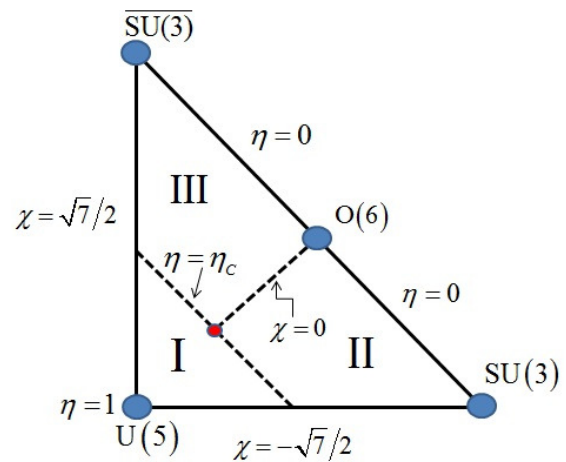
برای بررسی سه تقارن دینامیکی و مناطق گذار در IBM، از فرمالیسم سازگار-Q (CQF¹) استفاده می‌شود.

در این فرمالیسم، هامیلتون پیشنهادی براساس یک شکل ساده شده از هامیلتون IBM است و به صورت زیر نشان داده شده است [۳۴]:

$$\hat{H}(\eta, \chi) = \eta \hat{n}_d - \frac{1-\eta}{N} \hat{Q}_\chi \cdot \hat{Q}_\chi \quad (1)$$

در این رابطه $\hat{Q}_\chi$ عملگر گشتاور چهار قطبی الکتریکی می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Q_\mu = [d^\dagger s + s^\dagger \tilde{d}]_\mu + \chi [d^\dagger \times \tilde{d}]_\mu$$



شکل ۱. نواحی مختلف مثلث کاستن توسعه یافته.

1. Consistent-Q Formalism



می‌توان نشان داد که حاصل ضرب داخلی در رابطه ۷ برابر است با:

$${}_{d, N_B - l_1} \langle \varphi | \varphi \rangle_{d, N_B - l_1} = \frac{1}{\lambda_l^\gamma} \sum_{l_t, l_r, l_s} \delta_{N_B - l_1, l_t + l_r + l_s} \eta_{l_1, l_t, l_r, l_s}^\gamma$$

با قطری کردن ماتریس چگالی حالات همدوس می‌توان ویژه مقادیر آن را به‌دست آورد. در اصل این ویژه مقادیر، اعداد اشمیت هستند. با داشتن این اعداد می‌توان به کمک رابطه زیر آنتروپی درهم‌تنیدگی ($H(\rho)$) را محاسبه کرد [۳۵]:

$$H(\rho) = - \sum_{l_1} \lambda_{l_1}^\gamma \log(\lambda_{l_1}^\gamma) \quad (۸)$$

۳. نتایج

تقارن‌های مدل IBM و گذار فازی‌شکلی بین آنها به همراه مقادیر پارامترهای η و χ در شکل ۱ نشان داده شده است. همان‌طور که از این شکل می‌توان دریافت به ازای $\eta = 0$ و $-۱.۳۳ \leq x \leq ۱.۳۳$ ، گذار از حد تقارنی $SU(3)$ به $\overline{SU(3)}$ اتفاق می‌افتد. هنگامی که $\chi = ۱.۳۳$ و $0 \leq \eta \leq ۱$ باشد گذار از $U(5)$ به $\overline{SU(3)}$ و به ازای $\chi = -۱.۳۳$ ، گذار از $SU(3)$ به $U(5)$ را خواهیم داشت. گذر از حد تقارنی $O(6)$ به $U(5)$ قرار دادن $\chi = 0$ و $0 \leq \eta \leq ۱$ صورت می‌پذیرد.

با استفاده از روابط (۶) و (۸) می‌توان دریافت که آنتروپی درهم‌تنیدگی به پارامتر تغییر شکل β و تعداد بوزون‌ها (N_B) وابسته است. بنابراین به منظور محاسبه آنتروپی درهم‌تنیدگی، ابتدا باید مقادیر پارامتر تغییر شکل تعادلی تعیین گردد. پارامتر β تعادلی با قرار دادن پارامترهای کنترلی η و χ و تعداد بوزون مشخص در رابطه انرژی (رابطه (۳)) و مینیمم کردن آن نسبت به β تعیین می‌شود. سپس با قرار دادن این مقادیر در رابطه آنتروپی، مقادیر آنتروپی به ازای هر η و χ محاسبه می‌شود.

به منظور بررسی QPT در چارچوب IBM با استفاده از آنتروپی درهم‌تنیدگی، مثلث کاستن را به چهار مسیر تقسیم کردیم. برای هر یک از این مسیرها، تغییرات آنتروپی را برحسب پارامترهای کنترلی به‌دست آورده و ترسیم کردیم. تمام محاسبات عددی در این مقاله به کمک نرم‌افزار MATLAB کد نویسی و انجام شده است. روند محاسبات عددی طی گام‌های زیر انجام شده است: از آنجایی که آنتروپی درهم‌تنیدگی به پارامتر تغییر شکل β و تعداد بوزون‌ها (N_B) وابسته است (روابط ۴، ۶ و ۸)، بنابراین در گام اول بایستی

که در آن پارامتر $\eta_{l_1, l_t, l_r, l_s}$ عبارت است از:

$$\eta_{l_1, l_t, l_r, l_s} = \theta \frac{N_B!}{l_1! l_t! l_r! l_s!} \alpha_s^{l_1} \alpha_{d_s}^{l_t} \alpha_{d_r}^{l_r} \alpha_{d_r}^{l_s}$$

با توجه به تعریف فوق حالت سیستم برحسب درهم‌تنیدگی بوزون‌های s و d به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$|\psi_{\beta, \gamma}(N_B)\rangle = \sum_{l_1=0}^{N_B} \lambda_{l_1} |l_1\rangle_s |\varphi\rangle_{d, N_B - l_1} \quad (۵)$$

$$\lambda_{l_1} = \sqrt{\sum_{l_t, l_r, l_s} \delta_{N_B - l_1, l_t + l_r + l_s} \eta_{l_1, l_t, l_r, l_s}^\gamma} \quad (۶)$$

ضرایب λ_{l_1} در اصل اعداد اشمیت هستند که به کمک آنها می‌توان آنتروپی درهم‌تنیدگی را محاسبه کرد. اما قبل از محاسبه آنتروپی درهم‌تنیدگی به سادگی می‌توان نشان داد که اعداد اشمیت در قالب بسط دوجمله‌ای قرار می‌گیرند، بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} \sum_{l_t, l_r, l_s} \delta_{N_B - l_1, l_t + l_r + l_s} \eta_{l_1, l_t, l_r, l_s}^\gamma &= \theta^\gamma \frac{(N_B!)^\gamma}{l_1!} \alpha_s^{l_1} \sum_{l_t, l_r, l_s} \frac{1}{l_t! l_r! l_s!} \alpha_{d_s}^{l_t} \alpha_{d_r}^{l_r} \alpha_{d_r}^{l_s} \\ &\quad \times \delta_{N_B - l_1, l_t + l_r + l_s} \\ &= \theta^\gamma \frac{(N_B!)^\gamma}{l_1! (N_B - l_1)!} \alpha_s^{l_1} \sum_{l_t, l_r, l_s} \frac{(N_B - l_1)!}{l_t! l_r! l_s!} \alpha_{d_s}^{l_t} \alpha_{d_r}^{l_r} \alpha_{d_r}^{l_s} \delta_{N_B - l_1, l_t + l_r + l_s} \end{aligned}$$

در اینجا ضریب سیگما بسط دوجمله‌ای می‌باشد، بنابراین حاصل می‌شود:

$$\sum_{l_t, l_r, l_s} \frac{(N_B - l_1)!}{l_t! l_r! l_s!} \alpha_{d_s}^{l_t} \alpha_{d_r}^{l_r} \alpha_{d_r}^{l_s} \delta_{N_B - l_1, l_t + l_r + l_s} = (\alpha_{d_s}^\gamma + \alpha_{d_r}^\gamma + \alpha_{d_r}^\gamma)^{N_B - l_1}$$

به این ترتیب داریم:

$$\lambda_{l_1}^\gamma = \theta^\gamma \frac{(N_B!)^\gamma}{l_1! (N_B - l_1)!} \alpha_s^{l_1} \left(\underbrace{\alpha_{d_s}^\gamma + \alpha_{d_r}^\gamma + \alpha_{d_r}^\gamma}_{\beta^\gamma} \right)^{N_B - l_1}$$

بخش d بوزونی حالت همدوس را از بخش s بوزونی مجزا کرده و به صورت زیر می‌نویسیم:

$$|\varphi\rangle_{d, N_B - l_1} = \frac{1}{\lambda_{l_1}} \sum_{l_t, l_r, l_s} \delta_{N_B - l_1, l_t + l_r + l_s} \eta_{l_1, l_t, l_r, l_s} |l_1\rangle_s |l_t\rangle_{d_s} |l_r\rangle_{d_r} |l_s\rangle_{d_r}$$

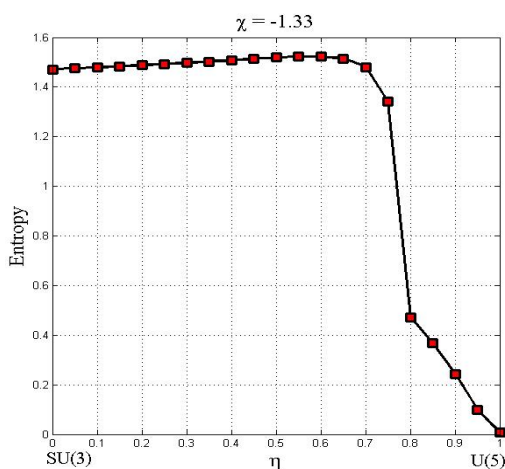
اکنون به کمک تعریف ماتریس چگالی حالات همدس (ρ) داریم:

$$\begin{aligned} \rho &= Tr_d |\psi_{\beta, \gamma}(N_B)\rangle \langle \psi_{\beta, \gamma}(N_B)| \\ &= \sum_{l_1, l_1'} \lambda_{l_1} \lambda_{l_1'} |l_1\rangle_s \langle l_1'|_s \underbrace{\langle \varphi | \varphi \rangle_{d, N_B - l_1}}_{\rho_{N_B - l_1, N_B - l_1'}^d} \end{aligned} \quad (۷)$$

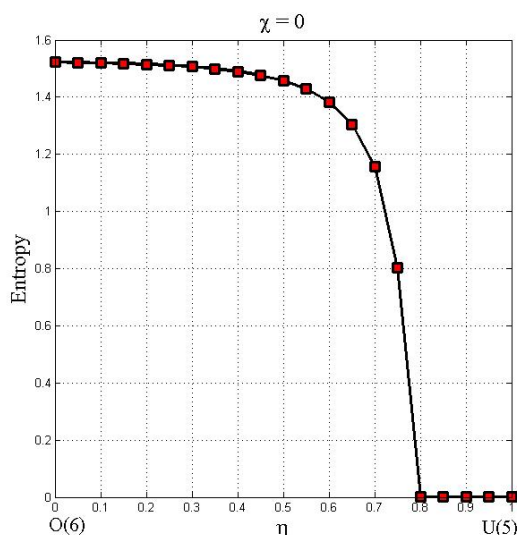


۴. بررسی مناطق داخلی مثلث کاستن

در ادامه به منظور بررسی نواحی مختلف مثلث کاستن، مقادیر پارامترهای کنترلی را با گام‌های ۰/۱ تغییر داده و آنتروپی درهم‌تنیدگی بوزون‌های s و d برای این نقاط محاسبه شد. نتایج محاسبات در کل مثلث کاستن در شکل ۶ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که مقدار آنتروپی درهم‌تنیدگی در مناطق نزدیک به یک تقارن تقریباً ثابت است و در نقطه بحرانی، این مقادیر افت شدیدی کرده که منجر به تقارن دیگری می‌شود. بنابراین مقادیر آنتروپی درهم‌تنیدگی به تغییر فاز حساس هستند و می‌توانند به عنوان یک مشاهده‌پذیر برای تشخیص QPT در نظر گرفته شوند.



شکل ۲. تغییرات آنتروپی درهم‌تنیدگی برحسب پارامتر کنترلی η و در مسیر $SU(3)$ به $U(5)$.



شکل ۳. تغییرات آنتروپی درهم‌تنیدگی برحسب پارامتر کنترلی η و در مسیر $O(6)$ به $U(5)$.

β_{eq} (تعادلی) تعیین گردد. در گام دوم به کمک β_{eq} که از مینیمم کردن رابطه انرژی (۳) نسبت به β تعیین می‌گردد، پارامترهای کنترلی η و χ تعیین می‌شوند. در گام سوم به کمک روابط ۶ و ۸ مقادیر آنتروپی به ازای هر η و χ محاسبه می‌شود. در اینجا ما تمامی نواحی مثلث کاستن را در نظر گرفتیم و در تمامی محاسبات $N_B=5$ در نظر گرفته شده است.

مسیر اول: گذار از حد تقارنی $SU(3)$ به $U(5)$

گذار در این مسیر به ازای $\chi = -1.33$ و $0 \leq \eta \leq 1$ رخ می‌دهد. نحوه تغییرات آنتروپی نسبت به پارامتر کنترلی η در شکل ۲ نشان داده شده است. در طول این مسیر، بیشترین و کمترین مقادیر آنتروپی به ترتیب به حدود $SU(3)$ و $U(5)$ مربوط می‌شوند. مقادیر آنتروپی درهم‌تنیدگی برای $0 \leq \eta \leq \eta_c$ تقریباً ثابت است و برای $\eta = \eta_c$ ، آنتروپی به شدت کاهش می‌یابد و در $\eta = 1$ که حد $U(5)$ است مقدار آن به صفر می‌رسد.

مسیر دوم: گذار از حد تقارنی $U(5)$ به $O(6)$

آنتروپی درهم‌تنیدگی در این مسیر همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد با قرار دادن $\chi = 0$ و $0 \leq \eta \leq 1$ به دست می‌آید. نتایج در شکل ۳ نشان داده شده است. مطابق با شکل ۳، بیشترین و کمترین مقادیر آنتروپی s و d بوزون به ترتیب در حدود $O(6)$ و $U(5)$ رخ می‌دهد. نقطه بحرانی در این منطقه، نقطه‌ای است که در آن آنتروپی درهم‌تنیدگی به شدت کاهش می‌یابد و از مقدار غیرصفر به صفر می‌رسد.

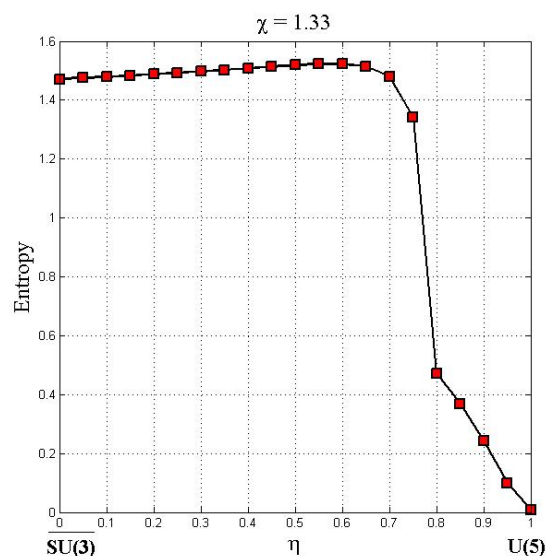
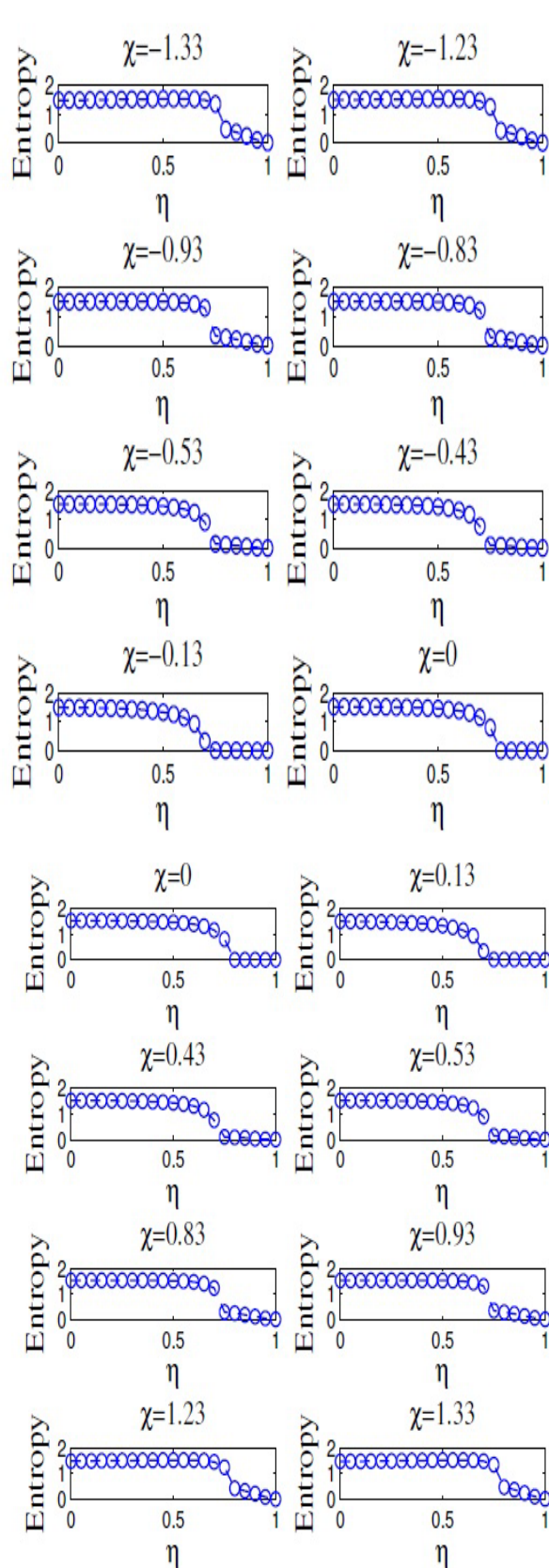
مسیر سوم: گذار از حد تقارنی $SU(3)$ به $U(5)$

به صورتی که در شکل ۴ دیده می‌شود رفتار آنتروپی در این مسیر مشابه مسیر اول بوده و مشابه عمل می‌کنند. بنابراین نتایج آنها نیز مانند هم می‌باشند.

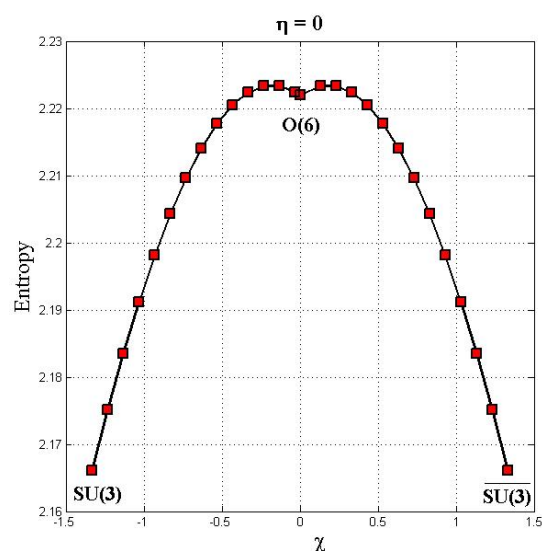
مسیر چهارم: گذار از $SU(3)$ به $SU(3)$

این گذار با قرار دادن $\eta = 0$ و تغییر مقادیر χ از -1.33 به 1.33 در رابطه انرژی (۳) و با عبور از حد تقارنی $O(6)$ با $\chi = 0$ رخ می‌دهد. نتایج محاسبات در شکل ۵ نشان داده شده است. به صورتی که در شکل ۵ می‌بینیم، آنتروپی درهم‌تنیدگی بوزون‌های s و d کاملاً برای حد $SU(3)$ به $SU(3)$ متقارن است و حد $O(6)$ با محور تقارن منحنی منطبق است. در حقیقت، تقارن $O(6)$ نقطه بحرانی در منطقه گذار $SU(3) \leftrightarrow SU(3)$ است. همچنین کمترین مقادیر آنتروپی مربوط به حدود $SU(3)$ و $SU(3)$ است.





شکل ۴. تغییرات آنتروپی درهم‌تنیدگی برحسب پارامتر کنترلی η و در مسیر $SU(3)$ به $U(5)$.



شکل ۵. تغییرات آنتروپی درهم‌تنیدگی برحسب پارامتر کنترلی χ و در مسیر $SU(3)$ به $SU(3)$.

شکل ۶. نحوه تغییرات دوبعدی آنتروپی درهم‌تنیدگی در مثلث کاستن برای

$$-1/33 \leq \chi \leq 1/33, 0 \leq \eta \leq 1$$



۵. نتیجه گیری

در این مقاله، استفاده از مقادیر درهم تنیدگی آنتروپی بوزون های s و d برای شناسایی و مشخص کردن گذار فاز کوانتومی در هسته ها مورد مطالعه قرار گرفت. رفتار این کمیت در مناطق مختلف مثلث کاستن در مدل IBM بررسی شد. برای محاسبه این مقادیر از تقریب نیمه کلاسیکی استفاده شد. مقادیر آنتروپی درهم تنیدگی در گذارهای $U(5)-SU(3)$ ، $U(5)-O(6)$ ، $U(5)-SU(3)$ و $SU(3) \leftrightarrow \overline{SU(3)}$ محاسبه و تغییرات این کمیت برحسب پارامتر کنترلی بررسی شد. نتایج نشان می دهد که آنتروپی درهم تنیدگی معیار خوبی برای شناسایی و مشخص کردن گذار فاز کوانتومی در هسته ها است و به تغییر فاز حساس می باشد. بنابراین مقادیر آنتروپی می توانند به عنوان یک مشاهده پذیر برای تشخیص QPT در نظر گرفته شوند.

مراجع

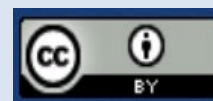
- Peruzzo A, McClean J, Shadbolt P, Yung M.H, Zhou X.Q, Love P.J, O'brien J.L. A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor. *Nature Communications*. 2014;5(1):1-7.
- McClean J.R, Romero J, Babbush R, Aspuru-Guzik A. The theory of variational hybrid quantum-classical algorithms. *New Journal of Physics*. 2016;18(2):023023.
- Chatzidimitriou-Dreismann C.A, Redah T.A, Streffer R.M.F, Mayers J. Anomalous Deep Inelastic Neutron Scattering from Liquid H_2O-D_2O : Evidence of Nuclear Quantum Entanglement. *Physical Review Letters*. 1997;79(15):2839.
- Bender M, Bernard R, Bertsch G, Chiba S, Dobaczewski J, Dubray N, Åberg S. Future of nuclear fission theory. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. 2020;47(11):113002.
- Schunck N, Robledo L.M. Microscopic theory of nuclear fission: a review. *Reports on Progress in Physics*. 2016;79(11):116301.
- Schunck N, Duke D, Carr H, Knoll A. Description of induced nuclear fission with Skyrme energy functionals: Static potential energy surfaces and fission fragment properties. *Physical Review C*. 2014;90(5):054305.
- Bulgac A, Jin S. Dynamics of fragmented condensates and macroscopic entanglement. *Physical Review Letters*. 2017;119(5):052501.
- Bulgac A, Jin S, Magierski P, Roche K.J, Stetcu I. Microscopic theory of nuclear fission. *arXiv preprint arXiv:1704.00689*. 2017.
- Sadhukhan J, Zhang C, Nazarewicz W, Schunck N. Formation and distribution of fragments in the spontaneous fission of 240 Pu. *Physical Review C*. 2017;96(6):061301.
- Verriere M, Schunck N, Kawano T. Number of particles in fission fragments. *Physical Review C*. 2019;100(2):024612.
- Bertulani C.A, Hussein M.S, Verde G. Blurred femtoscopy in two-proton decay. *Physics Letters B*. 2008;666(1):86-90.
- Bertulani C.A. Fingerprints of entangled states in reactions with rare isotopes. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*. 2003;29(4):769.
- Lello L, Boyanovsky D, Holman R. Entanglement entropy in particle decay. *Journal of High Energy Physics*. 2013;2013(11):116.
- Dulski K, Bass S.D, Chhokar J, Chug N, Curceanu C, Czerwiński E, Moskal P. First observation of ortho-positronium with the J-PET tomograph. *arXiv preprint arXiv:2006.07467*. 2020.
- Raj J, Silarski M. Study of the time reversal symmetry in the decay of ortho-Positronium atoms using the J-PET detector. *In EPJ Web of Conferences*. EDP Sciences. 2019;199:05015.
- Moskal P, Krawczyk N, Hiesmayr B.C, Bała M, Curceanu C, Czerwiński E, Zgardzińska B. Feasibility studies of the polarization of photons beyond the optical wavelength regime with the J-PET detector. *The European Physical Journal C*. 2018;78(11):1-9.
- Einstein A, Podolsky B, Rosen N. Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete? *Physical Review*. 1935;47(10):777.
- Bennett C.H, Brassard G, Crépeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters W.K. Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels. *Physical Review Letters*. 1993;70(13):1895.
- Ekert A.K. Quantum cryptography based on Bell's theorem. *Physical Review Letters*. 1991;67(6):661.
- Ekert A, Jozsa R. Quantum computation and Shor's factoring algorithm. *Reviews of Modern Physics*. 1996;68(3):733.
- Pichler T, Dalmonte M, Rico E, Zoller P, Montangero S. Real-time dynamics in $U(1)$ lattice gauge theories with tensor networks. *Physical Review X*. 2016;6(1):011023.
- Cloët I.C, Dietrich M.R, Arrington J, Bazavov A, Bishof M, Freese A, Zohar E. Opportunities for Nuclear Physics & Quantum Information Science. *arXiv preprint arXiv:1903.05453*. 2019.
- Ring P, Schuck P. The nuclear many-body problem. *Springer Science & Business Media*. 2004.
- Kaplan D.B, Klco N, Roggero A. Ground states via spectral combing on a quantum computer. *arXiv preprint arXiv:1709.08250*. 2017.
- Roggero A, Carlson J. Linear response on a quantum computer. *arXiv preprint arXiv:1804.01505*. 2018.
- Lamm H, Lawrence S. Simulation of nonequilibrium dynamics on a quantum computer. *Physical Review Letters*. 2018;121(17):170501.
- Kaplan D.B, Klco N, Roggero A. Ground states via spectral combing on a quantum computer. *arXiv preprint arXiv:1709.08250*. 2017.



28. Czerwiński E, Curceanu C, Dulski K, Gajos A, Gorgol M, Heczko A, Moskal P. Studies of discrete symmetries in decays of positronium atoms. *In EPJ Web of Conferences. EDP Sciences*. 2018;181:01019.
29. Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M, Horodecki K. Quantum entanglement. *Reviews of Modern Physics*. 2009;81(2):865.
30. Gühne O, Tóth G. Entanglement detection. *Physics Reports*. (2009);474(1-6):1-75.
31. Amico L, Fazio R, Osterloh A, Vedral V. Entanglement in many-body systems. *Reviews of Modern Physics*. 2008;80(2):517.
32. Benatti F, Floreanini R, Franchini F, Marzolino U. Entanglement in indistinguishable particle systems. *Physics Reports*. 2020.
33. Jafarizadeh M.A, Ghapanvari M, Amiri N. Entanglement entropy as a signature of a quantum phase transition in nuclei in the framework of the interacting boson model and interacting boson-fermion model. *Physical Review C*. 2022;105(1):014307.
34. Cejnar P, Jolie J, Casten R.F. Quantum phase transitions in the shapes of atomic nuclei. *Reviews of Modern Physics*. 2010;82(3):2155.
35. Perelomov A. Standard system of coherent states related to the heisenberg-weyl group: One degree of freedom. In *Generalized Coherent States and Their Applications*. Springer, Berlin, Heidelberg. 1986;7-39.

COPYRIGHTS

©2021 The author(s). This is an open access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution (CC BY 4.0), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, as long as the original authors and source are cited. No permission is required from the authors or the publishers.



استناد به این مقاله

قپانوری، مریم، جعفریزاده، محمدعلی، صیدی، مسعود، امیری، نرجس. (۱۴۰۴)، آنتروپی درهم‌تنیدگی در تقریب نیمه‌کلاسیک به عنوان مشاهده‌پذیر بررسی گذار فازی‌شکلی در هسته‌ها. *مجله علوم، مهندسی و فناوری هسته‌ای*، ۱۱۱(۱)، ۲۹-۳۶. DOI: <https://doi.org/10.24200/nst.2023.1609>

Url: https://jonsat.nstri.ir/article_1609.html

