J. of Nucl Sci. and Tech.
82, 2018, 1-9

مجله‌ی علوم و فنون هسته‌ای
۸۲، ۱۳۹۶، ۱-۹

کد محاسباتی سه‌بُعدی پارامترهای سینتیکی به روش اِلمان محدود گلرکین

سیدابوالفضل حسینی*
دانشکده‌ی مهندسی انرژی، دانشگاه صنعتی شریف، صندوق پستی: ۱۱۱۵۵-۱۱۳۶۵، تهران ـ ایران
پژوهشکده‌ی راکتور، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۱۳۳۹- ۱۴۱۵۵، تهران ـ ایران

چکیده: در این مقاله، توسعه‌ی کد کامپیوتری GFEM-KIN-3D به منظور محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی گزارش می‌شود. برای این منظور، در ابتدا معادله‌ی پخش نوترون مستقل از زمان و الحاقی آن در هندسه‌ی سه‌بُعدی با استفاده از روش اِلمان محدود گلرکین حل می‌شود. در ادامه، از طریق وارد کردن توزیع شار نوترونی و الحاقی آن در رابطه‌ی مربوط به اختلال، کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری و مدت زمان متوسط تولید نوترون‌ها محاسبه می‌شود. مشکل اصلی در راستی‌آزمایی این پروژه، عدم وجود مسئله‌ی آزمون است که شامل داده‌های مربوط به کسر نوترون‌های تأخیری، طیف نوترون‌های آنی و طیف نوترون‌های تأخیری باشد. بنابراین، به ناچار چند مسئله طراحی، و پارامترهای سینتیکی برای آنها محاسبه شد. با توجه به این‌که حل معادله‌ی پخش نوترون در سه‌بُعد با استفاده از مسائل آزمون معتبر راستی‌آزمایی شد و رابطه‌ی اختلال نیز یک رابطه‌ی کاملاً مشخص دارد، بنابراین با اطمینان می‌توان گفت در صورت داشتن اطلاعات کافی می‌توان پارامترهای سینتیکی را با دقت خوبی محاسبه کرد. کد کامپیوتری توسعه داده شده GFEM-KIN-3D قابل استفاده در محاسبات قلب راکتور با هر شکل هندسی اعم از راست‌گوش و شش‌گوش است.

کلیدواژه‌ها: ***شار نوترون، شار الحاقی، اِلمان هرمی، کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری، عمر متوسط تولید نوترون‌ها***

3D Computational Code for Calculation of Kineric Parameters Based on Galerkin Finite Element Method

S.A. Hosseini*
Department of Energy Engineering, Sharif University of Technology, P.O.Box: 11365-11155, Tehran-Iran
Reactor Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOI, P.O.Box: 14155-1339, Tehran-Iran

Abstract: In the present paper, development of the Galerkin Finite Element Method-Kinetic-3 Dimentional (GFEM-KIN-3D) computational code for the calculation of the kinetic parameters is reported. To this end, the static neutron diffusion and corresponding adjoint equations are solved using Galerkin Finite element method in the 3 dimensional geometry. Then, the calculated neutron and adjoint flux distributions are used in the perturbation theory to calculate the effective delayed neutron fraction and mean generation time of the neutrons. There is no benchmark problem that includes the information such as the delayed neutron fraction, prompt and delayed neutron spectrum. Therefore, some problems were designed by the author and the kinetic parameters were calculated for the considered problem. Since the neutron diffusion solver was previously validated against the well-known benchmark problems and the equations of perturbation theory is available, we conclude that if the required information is known, the kinetic parameters will be calculated with high accuracy. The developed GFEM-KIN-3D is applicable to the core calculation of the both hexagonal and rectangular reactor cores.

Keywords: ***Neutron Flux, Adjoint Flux, Tetrahedral Elements, Effective Delayed Neutron Fraction, Mean Generation Time of the Neutrons***

تاریخ دریافت مقاله: ۹۵/۱۱/۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۶/۷/۱۷

*email: @sharif.edu
sahosseini

۱. مقدمه

تعیین کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری (β_{eff}) و زمان تولید نوترون‌ها (Λ) به خاطر نقش مهم آن در محاسبات قلب راکتور و تحلیل‌گذارهای راکتیویته و نهایتاً ایمنی و کنترل راکتور اهمیت بسیاری دارند. به طور کلی روش منحصر به فردی برای محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی وجود ندارد و با معلوم بودن بعضی از این پارامترها در هر معادله‌ای که پارامترهای سینتیکی در آن وجود دارد، می‌توان آنها را برای محاسبه‌ی این پارامترها استفاده کرد. از جمله‌ی این معادلات، دستگاه معادلات سینتیکی و معادله‌ی In hour است. برخی از کدهای محاسباتی مانند CITATION و CITVAP (نسخه‌ی جدید CITATION) نیز وجود دارند که با استفاده از نظریه‌ی اختلال، محاسبات سینتیکی را انجام می‌دهند. در زمینه‌ی محاسبه پارامترهای سینتیکی، پژوهش‌های مختلفی در داخل و خارج از کشور صورت گرفته است که اغلب مبتنی بر کدهای کامپیوتری هم‌چون MTR_PC [۱-۳] و MCNP [۴، ۵] هستند. نوآوری کار فعلی نسبت به کارهای قبلی این است که محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی با استفاده از کد کامپیوتری توسعه یافته صورت می‌گیرد که در آن توزیع شار نوترونی، الحاقی شار نوترونی و ضریب تکثیر نوترونی با استفاده از روش اِلمان محدود گلرکین با دقت بالا محاسبه شده است و منجر به محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی با دقت بالا می‌شود. در این مقاله، پارامترهای سینتیکی شامل کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری و زمان تولید نوترون‌ها بر پایه‌ی روش مبتنی بر تئوری اختلال و روش عددی اِلمان محدود گلرکین برای حل معادله‌ی پخش نوترون محاسبه می‌شوند. کد کامپیوتری توسعه داده شده می‌تواند برای انجام محاسبات پارامترهای سینتیکی قلب راکتورهای تحقیقاتی، PWR و VVER استفاده شود.

۲. محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی

۱.۲ حل عددی معادله‌ی پخش نوترون چند گروهی در یک محیط سه‌بُعدی با استفاده از روش گلرکین

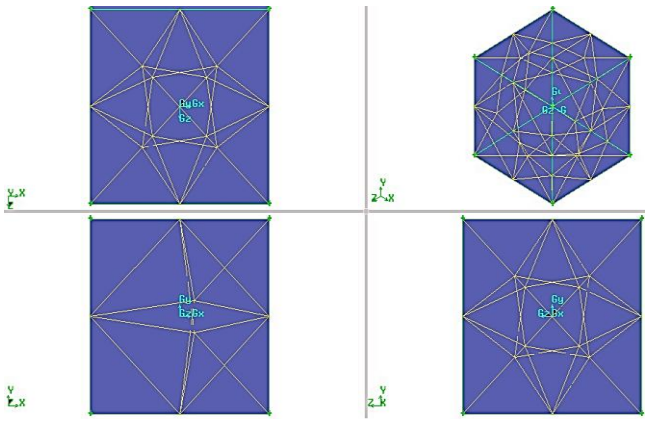
۱.۱.۲ حل معادله‌ی پخش نوترون در سه‌بُعد

اساس کار روش‌های باقی‌مانده‌ی وزن شده، کمینه کردن انتگرال حاصل ضرب باقی‌مانده در تابع وزن است. در روش گلرکین، تابع وزن به صورت جواب تقریبی حدس زده شده برای شار نوترون در نظر گرفته می‌شود، با این تفاوت که ضریب ثابت استفاده شده برابر یک است [۶، ۷]. معادله‌ی پخش چند گروهی مطابق معادله‌ی (۱) در نظر گرفته می‌شود [۸]:

$$-D_g\nabla^2\phi_g(r)+\Sigma_{rg}\phi_g(r)=\frac{\chi_g}{k_{eff}}\sum_{g'=1}^{G}\nu\Sigma_{fg'}\phi_{g'}(r)+\sum_{h=1}^{g-1}\Sigma_{h\to g}\phi_h(r)\quad g=1,2,\ldots,G \qquad (1)$$

در این رابطه، D_g ضریب پخش مربوط به گروه g، Σ_{rg} سطح مقطع ماکروسکوپی برداشت گروه g، $\Sigma_{fg'}$ سطح مقطع ماکروسکوپی شکافت گروه g'، $\Sigma_{h\to g}$ سطح مقطع ماکروسکوپی پراکندگی از گروه h به گروه g، k_{eff} ضریب تکثیر نوترونی مؤثر، $\phi_g(r)$ شار نوترون گروه g و χ_g کسر نوترون‌های ناشی از شکافت در گروه g است.

برای حل معادله‌ی پخش نوترون در مختصات سه‌بُعدی لازم است که ابتدا ناحیه‌ی مورد نظر را به اِلمان‌های کوچک‌تر تقسیم کرد که این اِلمان‌ها می‌توانند هرمی، منشوری و یا از انواع دیگری باشند. اِلمان مورد استفاده در این‌جا از نوع هرمی درجه‌ی ۱ (با درون‌یابی خطی) است که با استفاده از نرم‌افزار گمبیت تولید شده است. در شکل ۱، تقسیم‌بندی یک مکعب ساده به اِلمان‌های هرمی از ۴ جهت نشان داده شده است.



شکل ۱. شمایی از اِلمان‌بندی یک هندسه‌ی مکعبی به اِلمان‌های هرمی.

تابع تقریبی که بتواند شار نوترون را درون هر هرم تقریب بزند به شکل رابطه‌ی (۲) است [۹]:

$$\phi^{(e)}(x,y,z)=L_1(x,y,z)\phi_1+L_2(x,y,z)\phi_2+L_3(x,y,z)\phi_3+L_4(x,y,z)\phi_4 \quad (۲)$$

در رابطه‌ی (۲)، تابع شکل محلی به صورت رابطه‌ی (۳) است:

$$N(x,y,z)=\left[L_1(x,y,z)\quad L_2(x,y,z)\quad L_3(x,y,z)\quad L_4(x,y,z)\right] \quad (۳)$$

و هر یک از مؤلفه‌های تابع شکل به صورت رابطه‌ی (۴) تعریف می‌شوند:

$$L_i(x,y,z)=\frac{a_i+b_i x+c_i y+d_i z}{6V};\ i=1,2,3,4. \quad (۴)$$

که در آن، V حجم هرم است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$6V=\det\begin{bmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{bmatrix} \quad (۵)$$

ضرایب مربوط به نقطه‌ی ۱ به صورت زیر تعریف می‌شوند[۹]:

$$a_1=\det\begin{bmatrix}x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\\ x_4 & y_4 & z_4\end{bmatrix}$$

$$b_1=-\det\begin{bmatrix}1 & y_2 & z_2\\ 1 & y_3 & z_3\\ 1 & y_4 & z_4\end{bmatrix}$$

$$c_1=-\det\begin{bmatrix}x_2 & 1 & z_2\\ x_3 & 1 & z_3\\ x_4 & 1 & z_4\end{bmatrix}$$

$$d_1=-\det\begin{bmatrix}x_1 & y_2 & 1\\ x_2 & y_3 & 1\\ x_3 & y_4 & 1\end{bmatrix} \quad (۶)$$

ضرایب مربوط به سایر نقاط با تغییر تناوبی (جای گشت ساعت‌گرد) اندیس‌ها از رابطه‌ی (۶) به دست می‌آید. برای حل معادله‌ی پخش نوترون به روش گلرکین، ابتدا دو طرف معادله در تابع وزن ضرب، و سپس روی حجم هر عنصر انتگرال گرفته، و با هم جمع می‌شوند:

$$W(x,y,z)=N(x,y,z) \quad (۷)$$

با ضرب طرفین معادله‌ی پخش نوترون در تابع وزن و استفاده از قضیه‌ی دیورژانس در تبدیل انتگرال‌گیری حجمی به انتگرال‌گیری سطحی در نهایت:

$$\sum_{e=1}^{E}\Big[\int_V dv\, D_g \nabla \underline{N}^{(e)}(r)\nabla \underline{N}^{T(e)}(r)\phi_g^{(e)}+\Sigma_{r,g}^{(e)}\int_V dv\, \underline{N}^{(e)}(r)\underline{N}^{T(e)}(r)\phi_g^{(e)}+\int_A ds\, \underline{N}^{(e)}(r)\underline{N}^{T(e)}(r)\phi_g^{(e)}\Big]=$$
$$\sum_{e=1}^{E}\Big[\frac{\chi_g}{k_{eff}}\sum_{g'=1}^{G}\nu\Sigma_{f,g'}\int_V dv\, \underline{N}^{(e)}(r)\underline{N}^{T(e)}(r)\phi_{g'}^{(e)}+\sum_{h=1}^{g-1}\Sigma_{h\to g}\int_V dv\, \underline{N}^{(e)}(r)\underline{N}^{T(e)}(r)\phi_h^{(e)}\Big] \quad (۸)$$

در محاسبات انجام شده، سه نوع انتگرال در معادله‌ی (۸) وجود دارد که به روش تحلیلی از رابطه‌ی (۹) محاسبه می‌شوند:

$$\int_V L_1^a L_2^b L_3^c L_4^d\, dx\, dy\, dz=\frac{a!b!c!d!}{(a+b+c+d+3)!}6V \quad (۹)$$

هر یک از انتگرال‌های موجود در معادله‌ی (۸) با استفاده از رابطه‌ی (۹) به صورت معادلات (۱۰) تا (۱۲) محاسبه می‌شوند:

$$\int_V dv\,\nabla \underline{N}^{(e)}(r)\nabla \underline{N}^{T(e)} = \frac{1}{36V^{(e)}}\begin{bmatrix} b_1^{(e)}b_1^{(e)}+c_1^{(e)}c_1^{(e)}+d_1^{(e)}d_1^{(e)} & b_1^{(e)}b_2^{(e)}+c_1^{(e)}c_2^{(e)}+d_1^{(e)}d_2^{(e)} & b_1^{(e)}b_3^{(e)}+c_1^{(e)}c_3^{(e)}+d_1^{(e)}d_3^{(e)} & b_1^{(e)}b_4^{(e)}+c_1^{(e)}c_4^{(e)}+d_1^{(e)}d_4^{(e)} \\ b_2^{(e)}b_1^{(e)}+c_2^{(e)}c_1^{(e)}+d_2^{(e)}d_1^{(e)} & b_2^{(e)}b_2^{(e)}+c_2^{(e)}c_2^{(e)}+d_2^{(e)}d_2^{(e)} & b_2^{(e)}b_3^{(e)}+c_2^{(e)}c_3^{(e)}+d_2^{(e)}d_3^{(e)} & b_2^{(e)}b_4^{(e)}+c_2^{(e)}c_4^{(e)}+d_2^{(e)}d_4^{(e)} \\ b_3^{(e)}b_1^{(e)}+c_3^{(e)}c_1^{(e)}+d_3^{(e)}d_1^{(e)} & b_3^{(e)}b_2^{(e)}+c_3^{(e)}c_2^{(e)}+d_3^{(e)}d_2^{(e)} & b_3^{(e)}b_3^{(e)}+c_3^{(e)}c_3^{(e)}+d_3^{(e)}d_3^{(e)} & b_3^{(e)}b_4^{(e)}+c_3^{(e)}c_4^{(e)}+d_3^{(e)}d_4^{(e)} \\ b_4^{(e)}b_1^{(e)}+c_4^{(e)}c_1^{(e)}+d_4^{(e)}d_1^{(e)} & b_4^{(e)}b_2^{(e)}+c_4^{(e)}c_2^{(e)}+d_4^{(e)}d_2^{(e)} & b_4^{(e)}b_3^{(e)}+c_4^{(e)}c_3^{(e)}+d_4^{(e)}d_3^{(e)} & b_4^{(e)}b_4^{(e)}+c_4^{(e)}c_4^{(e)}+d_4^{(e)}d_4^{(e)} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\int_V dv\,\underline{N}^{(e)}(r)\underline{N}^{T(e)} = 6V^{(e)}\begin{bmatrix} \frac{1}{60} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{60} & \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{120} & \frac{1}{60} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\int_A ds\,\underline{N}^{(e)}(r)\underline{N}^{T(e)} = 2\Delta^{(e)}\begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

در رابطه‌ی (۱۲)، $\Delta^{(e)}$ مساحت سطح مثلثی واقع در مرز است. با حل تمام انتگرال‌های بالا و سپس سرهم‌بندی آنها، دستگاه معادلات به شکل معادله‌ی (۱۳) به دست می‌آید که با حل آن شار نوترون در هر گروه انرژی و ضریب تکثیر نوترونی مؤثر به دست می‌آید. دستگاه معادلات (۱۳) از نوع مقدار ویژه است و به روش تکرار قابل حل است.

$$A\phi = \frac{1}{k_{eff}} B\phi \tag{13}$$

معیارهای هم‌گرایی در حل این دستگاه معادلات، به شکل روابط (۱۴) و (۱۵) هستند:

$$\left|\frac{\phi^{(n+1)}-\phi^{(n)}}{\phi^{(n)}}\right| < \varepsilon_1 \tag{14}$$

$$\left|\frac{k_{eff}^{(n+1)}-k_{eff}^{(n)}}{k_{eff}^{(n)}}\right| < \varepsilon_2 \tag{15}$$

که در آن ε_1 و ε_2، معیارهای هم‌گرایی‌اند. استفاده از روش اِلمان محدود گلرکین و اِلمان‌های هرمی می‌تواند برای هر هندسه‌ی پیچیده سه‌بُعدی منجر به نتایج با دقت بالا شود.

۲.۲ گسسته‌سازی الحاقی معادله‌ی پخش نوترون برای مسائل از نوع بحرانیت

۱.۲.۲ حل الحاقی معادله‌ی پخش نوترون در سه‌بُعد

برای حل عددی الحاقی معادله‌ی پخش نوترون باید دستگاه معادلات (۱۶) به روش مشابه توضیح داده شده در بخش قبل حل شود.

$$A^{\dagger}\phi^{\dagger} = \frac{1}{k_{\text{eff}}^{\dagger}} B^{\dagger}\phi^{\dagger} \tag{16}$$

در معادله‌ی (۱۶)، $A^{\dagger}$ و $B^{\dagger}$ به ترتیب ترانهاده‌ی ماتریس‌های A و B هستند. هم‌چنین، $\phi^{\dagger}$ شار الحاقی و $k_{\text{eff}}^{\dagger}$ ضریب تکثیر مؤثر الحاقی‌اند. دستگاه معادلات (۱۶) به روش تکرار توان حل، با معیارهای هم‌گرایی مشابه معادلات (۱۴) و (۱۵) حل خواهد شد.

۳.۲ تئوری اختلال

در این مقاله، پارامترهای سینتیکی با روش مبتنی بر نظریه‌ی اختلال مرتبه‌ی اول محاسبه می‌شوند. این روش که نیازمند شار نوترونی و الحاقی، طیف نوترون‌های آنی و تأخیری، سرعت نوترون و داده‌ی کسر نوترون تأخیری در هر گروه انرژی است، روش نسبتاً دقیق و دارای خطای بسیار کمی است. استفاده از نظریه‌ی اختلال برای محاسبه‌ی عمر متوسط نوترون‌های آنی،

منجر به معادله‌ی زیر می‌شود [۱۰-۱۳]:

$$\ell = \frac{\sum_i \frac{V_i}{V(n)} \phi^*_{i,n} \phi_{i,n}}{\frac{1}{k} \sum_i V_i \sum_g \chi(g) \phi^*_{i,g} \sum_n \nu \sum_{f,n} \phi_{i,n}} \quad (۱۷)$$

با دانستن عمر نوترون‌های آنی، زمان تولید نوترون‌ها از معادله‌ی (۱۸) به دست می‌آید:

$$\Lambda = \frac{\ell}{k} \quad (۱۸)$$

استفاده از نظریه‌ی اختلال برای به دست آوردن کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری برای خانواده‌ی jام، منجر به معادله‌ی (۱۹) می‌شود:

$$\beta_{eff,j} = \frac{\sum_i V_i \sum_g \chi'(j,g) \phi^*_{i,g} \sum_b \beta_{b,j} N_{b,i} \sum_n \upsilon \sigma_{f,n,b,i} \phi_{i,n}}{\sum_i V_i \sum_g \chi(g) \phi^*_{i,g} \sum_n \nu \sum_{f,n} \phi_{i,n}} \quad (۱۹)$$

که در آن i به مکان، V به حجم، g و n به گروه‌های انرژی، ϕ به شار و ϕ^* به شار الحاقی اشاره دارد. هم‌چنین، $\beta_{b,j}$ کسر نوترون‌های تأخیری گروه j در مکان i و برای هسته‌ی b است. $N_{b,i}$ چگالی هسته‌ی b در مکان i و $\chi'(j,g)$ تابع توزیع نوترون‌های تأخیری را نشان می‌دهد.

با گسسته‌سازی معادلات (۲۰) و (۲۱) و جفت کردن کدهای تولید شده در مرجع [۷]، برای محاسبه‌ی شار نوترونی و الحاقی و روابط زیر، کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری و زمان تولید نوترون‌ها محاسبه می‌شوند:

$$\left[\frac{1}{\upsilon}\right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\upsilon_1}[I] & [\circ] & \cdots & [\circ] \\ [\circ] & \frac{1}{\upsilon_2}[I] & \cdots & [\circ] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ [\circ] & [\circ] & \cdots & \frac{1}{\upsilon_G}[I] \end{bmatrix} \quad (۲۰)$$

که معادله‌ی (۲۰)، ماتریس عکس سرعت را نشان می‌دهد. ماتریس مربوط به سهم نوترون‌های تأخیری حاصل از شکافت به صورت معادله‌ی (۲۱) است.

$$\mathbf{M}_d = \beta_d \begin{bmatrix} [\chi_{d1}\nu_1\Sigma^i_{f1}] & [\chi_{d1}\nu_2\Sigma^i_{f2}] & [\chi_{d1}\nu_3\Sigma^i_{f3}] & \cdots & [\chi_{d1}\nu_G\Sigma^i_{fG}] \\ [\chi_{d2}\nu_1\Sigma^i_{f1}] & [\chi_{d2}\nu_2\Sigma^i_{f2}] & [\chi_{d2}\nu_3\Sigma^i_{f3}] & \cdots & [\chi_{d2}\nu_G\Sigma^i_{fG}] \\ [\chi_{d3}\nu_1\Sigma^i_{f1}] & [\chi_{d3}\nu_2\Sigma^i_{f2}] & [\chi_{d3}\nu_3\Sigma^i_{f3}] & \cdots & [\chi_{d3}\nu_G\Sigma^i_{fG}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\chi_{dG}\nu_1\Sigma^i_{f1}] & [\chi_{dG}\nu_2\Sigma^i_{f2}] & [\chi_{dG}\nu_3\Sigma^i_{f3}] & \cdots & [\chi_{dG}\nu_G\Sigma^i_{fG}] \end{bmatrix} \quad (۲۱)$$

در آن، χ_{di}، بیان‌کننده‌ی مؤلفه‌های طیف نوترون‌های تأخیری می‌باشد. هم‌چنین ماتریس مربوط به سهم نوترون‌های آنی حاصل از شکافت به صورت معادله‌ی (۲۲) تعریف می‌شود.

$$\mathbf{M_p} = (1-\beta) \begin{bmatrix} [\chi_1\nu_1\Sigma^i_{f1}] & [\chi_1\nu_2\Sigma^i_{f2}] & [\chi_1\nu_3\Sigma^i_{f3}] & \cdots & [\chi_1\nu_G\Sigma^i_{fG}] \\ [\chi_2\nu_1\Sigma^i_{f1}] & [\chi_2\nu_2\Sigma^i_{f2}] & [\chi_2\nu_3\Sigma^i_{f3}] & \cdots & [\chi_2\nu_G\Sigma^i_{fG}] \\ [\chi_3\nu_1\Sigma^i_{f1}] & [\chi_3\nu_2\Sigma^i_{f2}] & [\chi_3\nu_3\Sigma^i_{f3}] & \cdots & [\chi_3\nu_G\Sigma^i_{fG}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\chi_G\nu_1\Sigma^i_{f1}] & [\chi_G\nu_2\Sigma^i_{f2}] & [\chi_G\nu_3\Sigma^i_{f3}] & \cdots & [\chi_G\nu_G\Sigma^i_{fG}] \end{bmatrix} \quad (۲۲)$$

(۲۳)

$$M = M_p + \sum_{d=1}^{D} M_d$$

χ_i، بیان کننده‌ی مؤلفه‌های طیف نوترون‌های آنی است.

در نتیجه:

(۲۴)

$$\beta_{eff,d} = \frac{\phi M_d \phi^\dagger}{\phi M \phi^\dagger}, \quad \beta_{eff} = \sum_{d=1}^{D} \beta_{eff,d}$$

و

(۲۵)

$$\Lambda = \frac{\phi V^{-1} \phi^{\dagger}}{\phi M \phi^{\dagger}}$$

در روابط بالا، ϕ و $\phi^{\dagger}$ بردار شار و شار نوترونی، V^{-1} ماتریس معکوس سرعت نوترون، M_d ماتریس مربوط به نوترون‌های تأخیری و M ماتریس مربوط به هر دو مجموعه نوترون‌های آنی و تأخیری است.

۳. نتایج

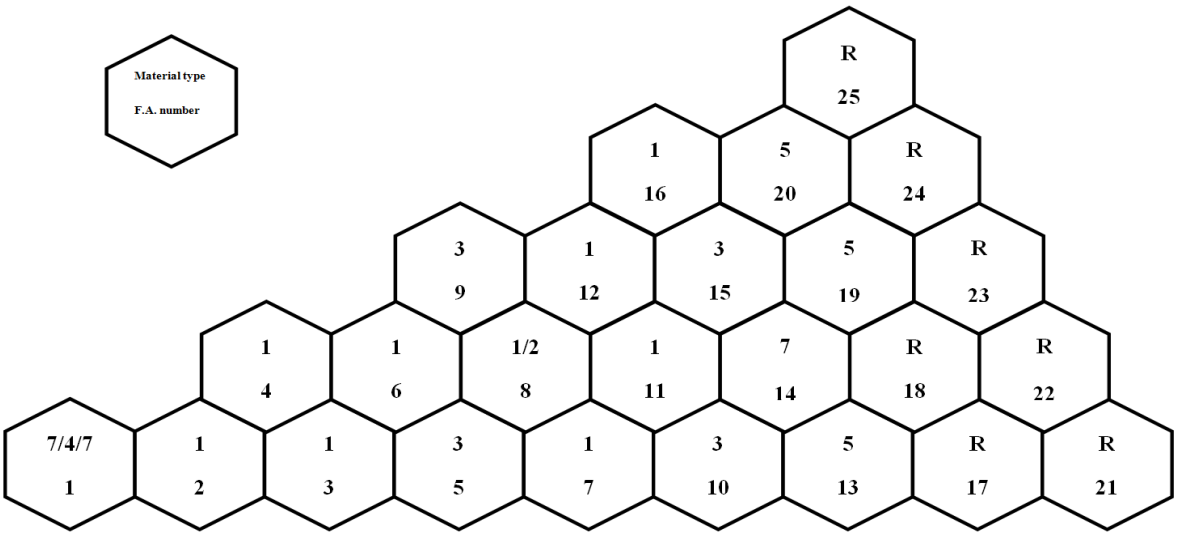
۱.۳ نتایج مربوط به حل معادله‌ی پخش نوترون

در این قسمت، نتایج به دست آمده از حل معادله‌ی پخش نوترونی چندگروهی و الحاقی آن در سه‌بُعد برای مسئله‌ی آزمون معتبر Schulz ارائه می‌شود.

محک Schulz [۷]، یک مدل قلب راکتور VVER-۱۰۰۰ در حالت ایستا است. قلب راکتور از ۷ نوع ماده شامل سوخت با غناهای مختلف، میله‌های کنترل و جاذب قابل فرسایش و بازتابنده تشکیل شده است. ارتفاع قلب ۳۵۵cm است که بازتابنده‌های شعاعی و محوری آن را فرا گرفته است. گام شبکه مجتمع‌های سوخت ۲۴٫۱cm است. در شکل ۲، تقارن ۳۰ درجه از قلب راکتور Schulz نشان داده شده است. مشخصات هر یک از مجتمع‌های قلب راکتور Schulz می‌تواند در مرجع [۱۴] یافت شود.

مقدار ضریب تکثیر نوترون مؤثر محاسبه شده از روش مستقیم و الحاقی برای تعداد اِلمان‌های ۴۴۰۰۶، ۷۵۰۴۰ و ۱۷۱۹۶۴ به ترتیب برابر ۱٫۰۴۸۲۵، ۱٫۰۴۸۹۳ و ۱٫۰۴۹۰۶ است که خطای نسبی محاسبه شده در مقایسه با مقدار مرجع ۱٫۰۴۹۵۲، به ترتیب برابر ۰٫۱۲۱۰-، ۰٫۰۵۶۲- و ۰٫۰۴۳۸- است. با افزایش تعداد اِلمان‌ها، اختلاف بین مقدار ضریب تکثیر نوترون محاسبه شده و مقدار مرجع کم می‌شود. در جدول ۱، قدرت نسبی محاسبه شده با کد توسعه داده شده GFEM-3D در هر لایه از هر یک از مجتمع‌های سوخت ارائه شده است. در این جدول، قدرت نسبی متوسط‌گیری شده در راستای محوری با مقادیر مرجع مقایسه، و خطای نسبی بین مقادیر محاسبه شده و مرجع ارائه شده است.

همان‌طور که از مقدار محاسبه شده برای ضریب تکثیر مؤثر نوترونی و نتایج ارائه شده در جدول ۱ مشخص است، نتایج محاسبه شده در کار فعلی هم‌خوانی بسیار خوبی با مقادیر مرجع دارند.



شکل ۲. شمایی از قلب راکتور Schulz با تقارن ۳۰ درجه (نما از بالای قلب راکتور).

جدول ۱. توان نسبی در هر یک از مجتمع‌های سوخت قلب راکتور Schulz

لایه‌ها													
مجتمع	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	توان نسبی متوسط	توان نسبی مرجع	درصد خطای

													نسبی
۱	۰٫۸۹۱	۱٫۹۱۴	۲٫۳۶۹	۱٫۸۳۸	۱٫۴۶۵	۱٫۰۵۲	۰٫۷۰۳	۰٫۴۶۹	۰٫۳۶۱	۰٫۱۵۸	۱٫۱۲۱۹	۱٫۱۱۹۹	۰٫۱۷۸۶
۲	۰٫۶۵۴	۱٫۴۱۱	۱٫۷۹۸	۱٫۷۱۲	۱٫۳۹۴	۰٫۹۸۵	۰٫۶۵۲	۰٫۴۲۶	۰٫۲۶۸	۰٫۱۱۳	۰٫۹۴۱۳	۰٫۹۴۷۵	−۰٫۶۵۴۴
۳	۰٫۶۶۸	۱٫۴۵۱	۱٫۹۰۰	۱٫۹۲۵	۱٫۵۶۹	۱٫۰۴۰	۰٫۶۷۵	۰٫۴۳۷	۰٫۲۵۸	۰٫۱۰۴	۱٫۰۰۲۶	۱٫۰۱۳۸	−۱٫۱۰۴۸
۴	۰٫۶۴۹	۱٫۴۰۹	۱٫۸۳۵	۱٫۸۴۳	۱٫۵۰۹	۱٫۰۳۰	۰٫۶۷۰	۰٫۴۳۳	۰٫۲۵۸	۰٫۱۰۵	۰٫۹۷۴۱	۰٫۹۸۲۱	−۰٫۸۱۴۶
۵	۰٫۸۸۰	۱٫۹۱۸	۲٫۵۴۲	۲٫۶۱۷	۲٫۱۰۰	۱٫۰۰۷	۰٫۷۸۱	۰٫۵۰۶	۰٫۲۹۳	۰٫۱۱۷	۱٫۲۷۶۱	۱٫۳۱۱۲	−۲٫۶۷۶۹
۶	۰٫۷۰۱	۱٫۵۲۸	۲٫۰۱۹	۲٫۰۷۰	۱٫۶۷۷	۱٫۰۴۹	۰٫۶۶۳	۰٫۴۲۶	۰٫۲۴۸	۰٫۰۹۹	۱٫۰۴۷۹	۱٫۰۵۷۱	−۰٫۸۷۰۳
۷	۰٫۶۹۱	۱٫۵۱۲	۲٫۰۱۵	۲٫۰۹۷	۱٫۷۲۴	۱٫۰۷۴	۰٫۶۸۴	۰٫۴۳۸	۰٫۲۵۲	۰٫۱۰۰	۱٫۰۵۸۷	۱٫۰۶۰۳	−۰٫۱۵۰۹
۸	۰٫۷۰۳	۱٫۵۳۷	۲٫۰۴۵	۲٫۱۱۹	۱٫۷۰۷	۰٫۸۵۹	۰٫۵۲۹	۰٫۳۳۸	۰٫۱۹۵	۰٫۰۷۸	۱٫۰۱۰۹	۱٫۰۰۹۱	−۰٫۱۷۸۴
۹	۰٫۸۷۳	۱٫۹۰۴	۲٫۵۳۱	۲٫۶۲۰	۲٫۱۳۹	۱٫۳۱۸	۰٫۸۱۹	۰٫۵۱۹	۰٫۲۹۹	۰٫۱۱۹	۱٫۳۱۴۲	۱٫۳۱۳۵	۰٫۰۵۳۳
۱۰	۰٫۷۶۲	۱٫۶۶۸	۲٫۲۳۲	۲٫۳۴۴	۲٫۰۱۴	۱٫۴۴۷	۰٫۹۶۴	۰٫۶۱۶	۰٫۳۵۴	۰٫۱۴۰	۱٫۲۵۴۲	۱٫۲۴۹۵	۰٫۳۷۶۲
۱۱	۰٫۶۵۶	۱٫۴۳۷	۱٫۹۲۱	۲٫۰۱۱	۱٫۷۰۱	۱٫۱۶۰	۰٫۷۵۸	۰٫۴۸۴	۰٫۲۷۸	۰٫۱۱۰	۱٫۰۵۱۶	۱٫۰۴۸۱	۰٫۳۳۳۹
۱۲	۰٫۶۵۹	۱٫۴۴۲	۱٫۹۲۶	۲٫۰۱۳	۱٫۶۹۳	۱٫۱۴۰	۰٫۷۳۶	۰٫۴۶۸	۰٫۲۶۹	۰٫۱۰۷	۱٫۰۴۵۳	۱٫۰۴۰۹	۰٫۴۲۲۷
۱۳	۰٫۴۱۶	۰٫۹۱۱	۱٫۲۲۱	۱٫۲۸۸	۱٫۱۲۵	۰٫۸۳۹	۰٫۵۷۰	۰٫۳۶۵	۰٫۲۰۹	۰٫۰۸۳	۰٫۷۰۲۷	۰٫۶۹۸۱	۰٫۶۵۸۹
۱۴	۰٫۶۲۷	۱٫۳۷۰	۱٫۸۳۶	۱٫۹۳۵	۱٫۶۸۴	۱٫۲۴۵	۰٫۸۴۲	۰٫۵۳۹	۰٫۳۰۹	۰٫۱۲۳	۱٫۰۵۰۹	۱٫۰۴۵۲	۰٫۵۴۵۴
۱۵	۰٫۶۹۲	۱٫۵۱۴	۲٫۰۲۹	۲٫۱۳۷	۱٫۸۵۶	۱٫۳۶۵	۰٫۹۲۰	۰٫۵۸۹	۰٫۳۳۸	۰٫۱۳۴	۱٫۱۵۷۲	۱٫۱۵۰۸	۰٫۵۵۶۱
۱۶	۰٫۵۶۷	۱٫۲۴۳	۱٫۶۶۴	۱٫۷۵۳	۱٫۵۲۱	۱٫۱۱۸	۰٫۷۵۲	۰٫۴۸۱	۰٫۲۷۶	۰٫۱۰۹	۰٫۹۴۸۴	۰٫۹۴۳۴	۰٫۵۳۰۰
۱۹	۰٫۳۶۴	۰٫۷۹۶	۱٫۰۶۸	۱٫۱۲۹	۰٫۹۹۳	۰٫۷۴۹	۰٫۵۱۳	۰٫۳۳۰	۰٫۱۸۹	۰٫۰۷۵	۰٫۶۲۰۷	۰٫۶۱۶۱	۰٫۰۰۷۵
۲۰	۰٫۴۵۰	۰٫۹۸۶	۱٫۳۲۲	۱٫۳۹۸	۱٫۲۳۰	۰٫۹۲۹	۰٫۶۳۷	۰٫۴۰۹	۰٫۲۳۵	۰٫۰۹۳	۰٫۷۶۹۱	۰٫۷۶۳۱	۰٫۷۸۶۲

۲.۳ نتایج مربوط به محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی

متأسفانه مسئله‌ی آزمونی که دربرگیرنده‌ی تمام اطلاعات ورودی از جمله طیف نوترون‌های تأخیری و داده‌های مربوط به نوترون‌های تأخیری باشد وجود نداشت. بنابراین دو مثال تولید شده که نتایج آن در زیر ارائه می‌شوند. با توجه به این‌که در قسمت قبلی، صحت محاسبات شار نوترونی و الحاقی تأیید شده است، بنابراین می‌توان گفت که در صورت وجود داده‌ی دقیق، پارامترهای سینتیکی با دقت خوبی قابل محاسبه است.

مسئله‌ی ۱:

برای قلب راکتور Schulz، فرض می‌شود مؤلفه‌ی طیف آنی و تأخیری در گروه سریع به ترتیب برابر ۰٫۹۹، ۰٫۹۵، و در گروه حرارتی به ترتیب برابر ۰٫۰۱، ۰٫۰۵ باشد. هم‌چنین سرعت نوترون‌ها در گروه سریع و حرارتی به ترتیب برابر ۱۸۲۳۰۰۰۰ و ۴۱۳۰۶۷ cm/s در نظر گرفته می‌شود. با فرض کسر نوترون‌های تأخیری در گروه‌های ۱ تا ۶ که به ترتیب برابر ۰٫۰۰۰۲۱۵، ۰٫۰۰۱۴۲۴، ۰٫۰۰۱۲۷۴، ۰٫۰۰۲۵۶۸، ۰٫۰۰۰۷۴۸ و ۰٫۰۰۰۲۷۳ pcm باشد، محاسبات پارامترهای سینتیکی انجام می‌شود. زمان متوسط تولید نوترون‌های محاسبه شده برابر ۰٫۰۰۳۴۷۸۷ s و کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری محاسبه شده در گروه‌های انرژی ۱ تا ۶، به ترتیب برابر ۰٫۰۰۰۲، ۰٫۰۰۱۴، ۰٫۰۰۱۳، ۰٫۰۰۲۶، ۰٫۰۰۰۸ و ۰٫۰۰۰۳ است.

مسئله‌ی ۲:

راکتور تحقیقاتی تهران با آرایش قلب شماره‌ی ۱ نشان داده شده در شکل ۳ در نظر گرفته می‌شود. در این شکل مجتمع‌های A بیان‌کننده‌ی مجتمع‌های سوخت SFE[1]، مجتمع‌های AS بیان‌کننده‌ی مجتمع‌های CFE[2] و بقیه مجتمع‌ها نشان‌دهنده‌ی سیال آب هستند. ابعاد مجتمع‌های سوخت ۷٫۷۰۸۹ cm در راستای x و ۸٫۱ cm در راستای y است. در اطراف قلب راکتور (شکل ۳) سه‌لایه‌ی بازتابنده‌ی آب قرار گرفته است. سطح مقطع ماکروسکوپی استفاده شده در محاسبات به صورت جدول ۲ است.

محاسبات قلب راکتور در سه گروه انرژی با فرض اطلاعات داده شده در جدول ۲ انجام شد. برای محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی، کسر نوترون‌های تأخیری استفاده شده در گروه‌های ۱ تا ۶، به ترتیب برابر ۰٫۰۰۰۲۱۵، ۰٫۰۰۱۴۲۴، ۰٫۰۰۱۲۷۴، ۰٫۰۰۲۵۶۸، ۰٫۰۰۰۷۴۸ و ۰٫۰۰۰۲۷۳ در نظر گرفته شده است. طیف انرژی آنی در گروه‌های انرژی ۱ تا ۳ به ترتیب برابر ۰٫۷۴۵۲۷۹، ۰٫۲۵۴۷۲۱ و ۰٫۰۰۰۰۰۱ در نظر گرفته شده است. هم‌چنین، طیف انرژی

تأخیری درگروه‌های انرژی ۱ تا ۳ به ترتیب برابر ۰٫۲۸۹۲۶۹، ۰٫۳۴۵۲۴۷ و ۰٫۳۶۵۴۸۴ در نظر گرفته شده است. سرعت فرضی برای نوترون‌ها در گروه‌های انرژی ۱ تا ۳ به ترتیب برابر $۱٫۸۲۳۰۴\times۱۰^{۷}$، $۱٫۰\times۱۰^{۷}$ و $۲٫۲\times۱۰^{۵}$ m/s است.

با در نظر گرفتن اطلاعات بالا، کسر نوترون‌های تأخیری مؤثر محاسبه شده و مدت زمان تولید نوترون‌ها به ترتیب برابر ۰٫۰۰۸۱ pcm و ۶۱٫۰۹ μs حاصل شده است. این نتایج در محدوده‌ی نتایج گزارش شده برای قلب راکتور تحقیقاتی تهران، و عدم قطعیت‌های موجود در آن مربوط به خطای احتمالی در داده‌های ورودی است.

	AS33-RR	A61	A120	
A140	A63	AS25-SR2	A66	A126
A106	AS24-SR1	A100	AS29-SR3	A116
A150	A75	AS22-SR4	A102	
	A133	A115		

شکل ۳. شمایی از آرایش شماره‌ی ۱ قلب راکتور تهران.

جدول ۲. مشخصات مجتمع‌های تشکیل‌دهنده قلب راکتور تهران

شماره ماده	گروه	D_g (cm)	Σ_g^a (cm$^{-۱}$)	$\Sigma_{۳\to g}^s$ (cm$^{-۱}$)	$\Sigma_{۲\to g}^s$ (cm$^{-۱}$)	$\Sigma_{۱\to g}^s$ (cm$^{-۱}$)	$\nu\Sigma_g^f$ (cm$^{-۱}$)
SFE	۱	۲٫۵۳۳۸۴	۰٫۰۰۱۰۸	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۱۳۳۶۴	۰٫۱۶۳۳۳
	۲	۰٫۹۱۱۵۹	۰٫۰۰۶۸۳	۰٫۰۰۰۴۵	۰٫۷۰۸۴۸	۰٫۰۷۰۱۱	۰٫۰۰۵۹۹
	۳	۰٫۲۵۸۸۸	۰٫۰۹۴۷۲	۱٫۷۱۹۱۱	۰٫۰۳۶۶۸	$۱٫۸۲۳۰۴\times۱۰^{-۱۴}$	۰٫۱۶۷۳۹
CFE	۱	۲٫۴۶۱۰۲	۰٫۰۰۰۸۷	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۱۳۶۷۸	۰٫۰۰۱۱۷
	۲	۰٫۸۵۵۰۹	۰٫۵۸۷۵۴	۰٫۰۰۰۴۳	۰٫۷۵۴۱۳	۰٫۰۷۶۷۷	۰٫۰۰۴۶۲
	۳	۰٫۲۴۳۶۹	۰٫۰۷۳۸۲	۱٫۸۴۶۳۲	۰٫۰۴۰۰۰	$۱٫۳۶۹۵۴\times۱۰^{-۱۴}$	۰٫۱۲۳۶۵
$H_۲O$	۱	۲٫۳۱۲۸۷	۰٫۰۰۰۵۱	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۱۵۷۰۰	۰٫۰۰۰۰۰
	۲	۰٫۶۲۷۳۹	۰٫۰۰۰۵۸	۰٫۰۰۰۱۱	۱٫۱۴۲۷۸	۰٫۱۰۶۵۹	۰٫۰۰۰۰۰
	۳	۰٫۱۴۶۹۹	۰٫۰۱۸۸۵	۳٫۱۴۰۶۷	۰٫۰۸۶۸۱	۰٫۰۰۰۰۰	۰٫۰۰۰۰۰

۴. نتیجه‌گیری

در این مقاله، پارامترهای سینتیکی کسر مؤثر نوترون‌های تأخیری و مدت زمان تولید نوترون‌ها با استفاده از کد کامپیوتری توسعه داده شده GFEM-KIN-3D برای مسائل مختلف محاسبه شده‌اند. از آن‌جا که درستی محاسبات شار نوترونی و الحاقی در بخش اول این مقاله مورد تأیید قرار گرفت، با پیاده‌سازی دقیق روابط مربوط به محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی، می‌توان از صحت محاسبات اطمینان پیدا کرد. از آن‌جا که کد کامپیوتری تجاری مشابهی وجود ندارد تا بتواند با استفاده از سطح مقطع‌های ماکروسکوپی، پارامترهای سینتیکی را محاسبه کند، در این مقاله فقط نتایج ارائه شدند و در صورت وجود اطلاعات مربوط به کسر نوترون‌های تأخیری، پارامترهای سینتیکی با دقت کافی محاسبه می‌شوند. کد توسعه داده شده در مقاله فعلی، می‌تواند به عنوان یک ابزار مناسب به منظور محاسبه‌ی پارامترهای سینتیکی در قلب راکتورهای هندسی با هر نوع شکل هندسی از جمله شش‌گوش و چهارضلعی استفاده شوند.

پی‌نوشت‌ها

1. Standard Fuel Element
2. Control Fuel Element

مراجع

[1] E. Villarino, MTR_PC V2. 6, a neutronic, thermalhydraulic and shielding calculations of MTR-type reactors on personal computers. Nuclear Engineering Division, INVAP SE, San Carlos de Bariloche, Argentina (1995).

[2] M. Zaker, Effective delayed neutron fraction and prompt neutron lifetime of Tehran research reactor, *Ann. Nucl. Energy*. **30** (2003) 1591-1596.

[3] A. Lashkari, H. Khalafi, H. Kazeminejad, Effective delayed neutron fraction and prompt neutron lifetime of Tehran research reactor mixed-core, *Ann. Nucl. Energy*. **55** (2013) 265-271.

[4] J.S. Hendricks, G.W. McKinney, M.L. Fensin, M.R. James, R.C, Johns, J.W. Durkee, MCNPX 2.6.0 Extensions, Los Alamos National Laboratory (2008).

[5] M. Arkani, M. Hassanzadeh, S. Khakshournia, Calculation of six-group importance weighted delayed neutron fractions and prompt neutron lifetime of MTR research reactors based on Monte Carlo method, *Prog. Nucl. Energy*. **88** 2016) 352-363.

[6] S.A. Hosseini, one dimensional neutron diffusion solver based on the Galerkin Finite Element Method, ANCC, (2008), ANC-RPT-DES-FG-100-Rev.01 (In Persian).

[7] S.A. Hosseini, Two dimensional neutron diffusion solver based on the Galerkin Finite Element Method, ANCC, (2008), ANC-RPT-DES-FG-200-Rev.01 (In Persian).

[8] J.J. Duderstadt, L.J. Hamilton, Nuclear reactor analysis, Wiley New York, **1** (1976).

[9] Taylor RL, Zhu JZ. The finite element method: its basis and fundamentals. Elsevier Butterworth-Heinemann (2005).

[10] J.R. Lamarsh, Nuclear Reactor Theory, Addison-Wesley (1966).

[11] S.A. Hosseini, N. Vosoughi, M.B. Ghofrani, M. Gharib, Calculation, measurement and sensitivity analysis of kinetic parameters of Tehran Research Reactor, *Ann. Nucl. Energy*. **37** (2010) 463-470.

[12] S.A. Hosseini, N. Vosoughi, Uncertainty evaluation of calculated and measured kinetics parameters of Tehran Research Reactor. *Nucl. Eng. and Des.* **240** (2010) 2761-2767.

[13] S.A. Hosseini, N. Vosoughi, M. Hosseini, Monte Carlo simulation of Feynman-α and Rossi-α techniques for calculation of kinetic parameters of Tehran Research Reactor, *Ann. Nucl. Energy*. **38** (2011) 2140-2145.

[14] G. Schulz, Solutions of a 3D VVER-1000 Benchmark, Proc. 6-th symposium of AER on VVER reactor physics and safety, Kirkkonummi, Finland (1996).