



ارزیابی مقدار آهن رباییده‌ی اسپین‌های هسته‌ای جاری در تصویرگیری با استفاده از تشدید مغناطیسی (MRI) با حل معادلات بلوخ به روش تفاضل محدود

سمانه بهرامی^۱، منصور عاشور*^۲، مهرداد بروشکی^۱

۱. دانشکده‌ی مهندسی انرژی، دانشگاه صنعتی شریف، صندوق پستی: ۱۱۱۵۵-۱۱۳۶۵، تهران - ایران

۲. پژوهشکده‌ی کاربرد پرتوها، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۳۴۸۶-۱۱۳۶۵، تهران - ایران

چکیده: توزیع مقدار آهن رباییده‌ی اسپین‌های هسته‌ای جاری در ارزیابی تپ‌های بسامد رادیویی استفاده شده در آنژیوگرافی با استفاده از تشدید مغناطیسی هسته از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این پژوهش توزیع مقدار اسپین‌های هسته‌ای جاری در زمان اعمال تپ‌های انتخابی برشی مستطیلی شکل و بعد از آن با حل معادلات بلوخ به روش تفاضل محدود، مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی اعمال تپ انتخابی مستطیلی شکل ۹۰ درجه‌ای نشان می‌دهد که با افزایش سرعت جریان، مقادیر آهن رباییده، در اثر حرکت اسپین‌های هسته‌ای، تغییر شکل می‌دهد، و این تغییرات ناشی از چگونگی حرکت اسپین‌های جاری است. بیش‌ترین تغییر شکل در مقادیر عرضی یعنی، M_x و M_y ایجاد می‌شود. افزایش تندی جریان خون، تقارن در این نمایه‌ها از بین می‌رود. در مقابل، در مقدار طولی یعنی، M_z تغییر چندانی به جز یک تغییر جهت در راستای سرعت قابل مشاهده نیست. به‌طور کلی با روش موجود می‌توان توزیع مقادیر آهن رباییده را برای تپ‌هایی با زاویه‌های تلنجر مختلف و هم‌چنین ترکیب فازهای تپ‌ها به دست آورد که نتایج حاصل می‌تواند در بررسی بهبود مشخصه‌های تصویری نگاشت‌های آنژیوگرافی با تشدید مغناطیسی و بررسی بیش‌تر تأثیر رشته تپ‌های طراحی شده بر روی اسپین‌های جاری مورد استفاده قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها: آهن ربایش، معادلات بلوخ، اسپین‌های هسته‌ای جاری، روش تفاضل محدود، تصویرگیری با تشدید مغناطیسی

Evaluation of the Magnetized Magnitudes of the Flowing Nuclear Spins Using Solving Bloch Equations by Finite Difference Method in MRI

S. Bahrami¹, M. Ashoor*², M. Boroshaki¹

1. Department of Energy Engineering, Sharif University of Technology, P.O.Box: 11365-11155, Tehran-Iran

2. Radiation Application Research School, Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOL, P.O.Box: 11365-3486, Tehran-Iran

Abstract: The distribution of the magnetized magnitudes of the flowing nuclear spins has a key role to evaluate the radiofrequency pulses used in the magnetic resonance angiography (MRA). In this study, a finite difference method is used to solve Bloch equations for the flowing nuclear spins during and after a 90° rectangular selective pulse which is important for optimization of the pulse sequence. The results of the simulation indicate that the magnitudes are deformed due to the flowing nuclear spins, while their velocity is increased. The maximum variations are created on the transverse magnitudes namely, M_x and M_y . The symmetry on these profiles disappear by increasing the velocity. In contrast, no variation on the longitudinal magnitude namely M_z is observed, except a shift on the velocity direction. The sensitivity of these profiles at low velocities for the rectangular selective pulse is more than that of the sinc type, which probably it may be used for characterizing the capillary space. In general, one may obtain the distribution of magnitudes for pulses with various flip angles, as well as, the combination of different pulses. The results may be employed to improve mapping indices in the MRA as well as assessment pulse sequences on the flowing nuclear spins.

Keywords: Magnetization, Bloch equations, Flowing nuclear spins, Finite element method, Magnetic resonance imaging angiography



۱. مقدمه

اسپین‌های جاری، به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی تبدیل می‌شود که حل تحلیلی آن بسیار مشکل است. بنابراین در این مقاله برای ارزیابی رفتار اسپین‌های جاری در حضور تپ بسامد رادیویی، از روش تفاضل محدود برای حل معادلات بلوخ استفاده شده است. پژوهش‌هایی در این زمینه، برای تابع تپ سینکی شکل انجام شده است [۳-۶]. اما در این پژوهش، برای ارزیابی رشته تپ‌های طراحی شده، توزیع مقدار آهن رباییده‌ی اسپین‌های جاری با سرعت ثابت در طی اعمال تپ مستطیلی شکل مورد بررسی قرار گرفته است.

۲. روش‌ها

۲.۱ معادلات بلوخ برای اسپین‌های جاری با سرعت ثابت

در سیستم دورانی، این معادلات که رفتار اسپین‌های جاری با سرعت ثابت v را نشان می‌دهند عبارت‌اند از [۷]:

(۱)

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = \gamma \vec{G} \cdot \vec{r} M_y - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) M_x$$

(۲)

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma \vec{G} \cdot \vec{r} M_x + \gamma H_1 M_z - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) M_y$$

(۳)

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma H_1 M_y - (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) M_z$$

که در آن $H_1(t)$ تپ تحریک بسامد رادیویی است که در راستای x اعمال می‌شود، $\vec{G}(t)$ شیب مغناطیسی و γ ضریب ژیرومغناطیسی و $\vec{v}(\vec{r}, t)$ سرعت جریان است. $M_x(\vec{r}, t)$ ، $M_y(\vec{r}, t)$ و $M_z(\vec{r}, t)$ مؤلفه‌های بردار آهن ربایش هسته‌ای در جهت‌های x ، y و z هستند. چون زمان اعمال تپ بسامد رادیویی بسیار کوتاه است، از این رو از اثرات زمان‌های آسایش در این جا صرف نظر شده است، اما به دلیل وجود این زمان‌های آسایشی، آن‌ها عملاً می‌توانند به عنوان یکی از منابع خطا در نتایج این پژوهش ظاهر شوند. جریان تنها در راستای z ، و شیب نیز در جهت z اعمال می‌شود. با این فرض‌ها معادلات ۱ تا ۳ به صورت زیر ساده می‌شوند

به طور کلی عملکرد مطلوب بافت‌ها متأثر از نحوه و چگونگی خون‌رسانی در راستای ایجاد و بسط مسیرهای مناسب توسط رگ‌های با اندازه‌های مختلف است. بررسی ساختار هندسی این رگ‌ها با تصاویر آنژیوگرافی قابل انجام است و روش تصویرگیری غیرتهاجمی با تشدید مغناطیسی هسته قادر است با اعمال تپ‌های مناسب و طراحی بهینه‌ی رشته تپ‌ها، تصاویری از رگ‌ها برای بررسی عملکرد صحیح آن‌ها ارائه نماید. بررسی نحوه‌ی رفتار مقادیر آهن رباییده در طی اعمال تپ‌های بسامد رادیویی و هم‌چنین بلافاصله بعد از آن به منظور بررسی فاز اسپین‌های جاری برای طراحی رشته تپ‌های آنژیوگرافی با تشدید مغناطیسی هسته نقش بسزایی را ایفا می‌نماید [۱]. برای بررسی کمی این‌گونه رفتارها معادلات بلوخ می‌توانند مورد استفاده قرار گیرند.

روش‌های محاسباتی پیشرفته امکان بررسی جریان خون در انحنای واقعی و هندسه‌های دو شاخه‌ای رگ را با استفاده از تصاویر آنژیوگرافی با تشدید مغناطیسی مهیا می‌سازند. محاسبات دینامیک سیالات می‌تواند برای بررسی جریان عبوری خون از محل انحنای رگ و هم‌چنین نواحی انشعابی رگ‌ها مورد استفاده قرار گیرد. این‌گونه مطالعات برای تشخیص بهتر آنوریسم (بزرگ شدگی و بیرون زدگی دیواره‌ی رگ) و گرفتگی و تنگی عروق است. البته ابهاماتی در تفسیر تصاویر آنژیوگرافی به دلیل وجود ورساخته‌ها (ورین ساخته‌ها)^(۱) پدید می‌آید. این ورساخته‌ها می‌توانند ناشی از عواملی ناخواسته هم‌چون جریان ضربانی و یا الگوهای پیچیده‌ی رگ‌ها باشند. اثرات ناشی از این ورساخته‌ها باعث می‌شوند که جریان در آن‌ها سریع‌تر از دیگر مناطق باشد و خط تیره‌ای در مرکز تصاویر عروق طبیعی ظاهر شود. اخیراً شبیه‌سازی هیدرودینامیکی، محاسبه‌ی مسیر ذرات را در شرایط مختلف امکان‌پذیر ساخته است و رهیافت‌هایی که از روش‌های اجزای محدود یا تفاضل محدود استفاده می‌کنند مسیر ذرات را در

لوله‌های پر پیچ و خم نمایش می‌دهند [۲].

راهکارهای متعددی از قبیل راهکارهای کامپیوتری، تحلیل هندسی و هم‌چنین نظریه‌ی آشفتگی برای حل معادلات بلوخ برای اسپین‌های ایستا با تشکیل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی ارائه شده‌اند. از طرفی معادلات بلوخ برای سیستم



(۴)

$$M_{x,i+1,j} = M_{x,i-1,j} + \gamma h G_z z M_{y,i,j} - v(h/k)(M_{x,i,j+1} - M_{x,i,j-1})$$

(۹)

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} = \gamma G_z z M_y - v \frac{\partial M_x}{\partial z}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} = -\gamma G_z z M_x + \gamma H_1 M_z - v \frac{\partial M_y}{\partial z}$$

(۵)

$$M_{y,i+1,j} = M_{y,i-1,j} - \gamma h G_z z M_{x,i,j} + \gamma h H_1 M_{z,i,j} - v(h/k)(M_{y,i,j+1} - M_{y,i,j-1})$$

(۱۰)

$$\frac{\partial M_z}{\partial t} = -\gamma H_1 M_y - v \frac{\partial M_z}{\partial z}$$

(۶)

$$M_{z,i+1,j} = M_{z,i-1,j} - \gamma h H_1 M_{y,i,j} - v(h/k)(M_{y,i,j+1} - M_{y,i,j-1})$$

(۱۱)

در رابطه‌های فوق Z معادل مقدار اولیه به اضافه jk است. مقدار M_x در $(j+1)$ و $(i+1)$ به وسیله‌ی مقادیر M_x در $(j-1)$ و $(i-1)$ و $(i, j-1)$ هم‌چنین مقدار M_y در (i, j) تعیین می‌شود. این یک روش چند مرحله‌ای است که برای محاسبه‌ی یک نقطه، از تخمین نقاط قبلی استفاده می‌نماید. دقت این روش از مرتبه‌ی $O(h^2, k^2)$

است. از لحاظ نظری هر چه مقادیر h و k کوچک‌تر باشند، تخمین‌های تفاضل محدود به مقدار واقعی نزدیک‌تر خواهند شد. برای حل معادلات، مانند همه‌ی روش‌های چند مرحله‌ای، به شرایط اولیه و هم‌چنین به شرایط مرزی نیاز است، که به صورت زیر تعریف می‌شوند [۶]

شرایط اولیه:

$$M_{x,0,j} = 0, \quad M_{y,0,j} = 0, \quad M_{z,0,j} = 1$$

و

$$M_{x,-1,j} = 0, \quad M_{y,-1,j} = 0, \quad M_{z,-1,j} = 1$$

شرایط مرزی:

(۱۲)

$$M_{x,i,N+1} = \frac{1}{\gamma} (M_{x,i+1,N} + M_{x,i-1,N})$$

$$M_{x,i,-1} = \frac{1}{\gamma} (M_{x,i+1,0} + M_{x,i-1,0})$$

(۱۳)

با جای‌گذاری رابطه‌های ۱۲ و ۱۳ در معادلات بلوخ، رابطه‌هایی برای نقاط مرزی در دامنه‌های مسأله به دست می‌آید.

برای اراییه‌ی یک راه حل برای این دستگاه از معادلات برای یک تابع مدولاسیون معمولی $H_1(t)$ ، روش تفاضل محدود می‌تواند به عنوان حل عددی مورد استفاده قرار گیرد [۶].

۲.۲ روش تفاضل محدود

یکی از عوامل مهم در استفاده از روش تفاضل محدود، انتخاب مش‌بندی مناسب با توجه به نوع مسأله است. مناسب‌ترین مش‌بندی، با توجه به وجود خطا و پیچیدگی‌های کم‌تر در محاسبات، انتخاب می‌شود. در این پژوهش از روش ریچاردسون برای مش‌بندی استفاده شد. در این روش، مشتق جزئی M_x نسبت به t و Z تقریباً برابر است با

(۷)

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} \approx \frac{M_{x,i+1,j} - M_{x,i-1,j}}{2h}$$

(۸)

$$\frac{\partial M_x}{\partial z} \approx \frac{M_{x,i,j+1} - M_{x,i,j-1}}{2k}$$

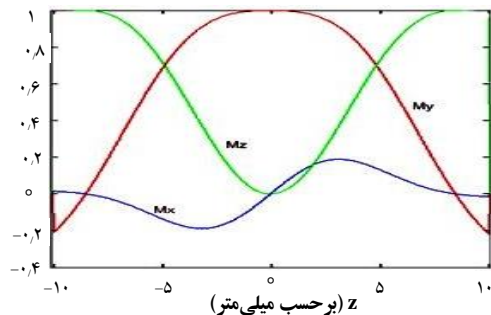
و رابطه‌های مشابه که برای مشتقات جزئی M_y و M_z نیز برقرار است. چون دامنه‌ی زمان و مکان دارای محدودیت است، می‌توان با تعداد مشخصی از نقاط آن‌ها را مش‌بندی کرد. در این جا i نشان‌دهنده‌ی شماره‌ی نقطه‌ی مورد نظر روی محور زمان است. با توجه به این که فاصله بین نقاط روی محور زمان h است، بنابراین در هر لحظه $t = ih$ است و $i = 0$ به معنی $t = 0$ خواهد بود. به‌طور مشابه محور مکان نیز با نقاطی با فاصله‌ی k از یک‌دیگر مش‌بندی می‌شود؛ بنابراین، مکان مورد نظر به صورت $Z = jk$ نشان داده خواهد شد که j در آن شماره‌ی نقطه‌ی مورد نظر خواهد بود [۸]. بنابراین با استفاده از تخمین‌های تفاضل محدود، معادلات ۴ تا ۶ به صورت زیر نوشته می‌شوند



حساسیت نمایه‌ی آهن‌ربایش اسپین‌های جاری در حالت اعمال تب به صورت تابع مستطیلی، نسبت به تابع سینک بیش تر است.

۴. بحث و نتیجه‌گیری

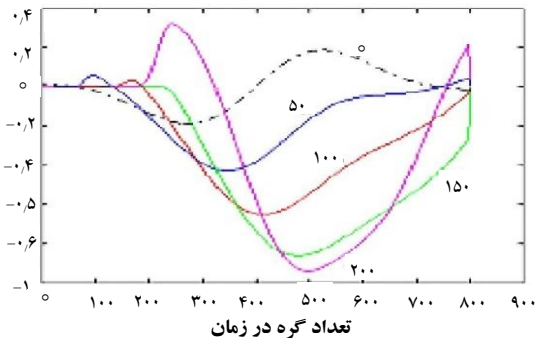
بررسی پاسخ مؤلفه‌های آهن‌ربایش اسپین‌های جاری برای ارزیابی تب‌های طراحی شده در آنژیوگرافی با تشدید مغناطیسی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. وقتی که خون در درون رگ-ها جریان می‌یابد و این جریان با استفاده از تشدید مغناطیسی هسته تصویرگیری می‌شود، حرکت اسپین‌های جاری باعث ایجاد مدولاسیون دامنه و فاز شده و علامتی را تولید می‌کنند. مدولاسیون دامنه در درجه‌ی اول یک اثر مستقل از زمان است که حرکت اسپین‌های جدید به داخل منطقه‌ی تحریک شده باعث آن خواهد شد. در طی اعمال تب‌های بسامد رادیویی با توانایی انتخاب برش^(۳)، اسپین‌های جاری، یک بسامد متغیر با زمان را تجربه می‌کنند، در نتیجه فاز اسپین‌های جاری نسبت به اسپین‌های ثابتی که چرخش آن‌ها در جهت صفحه‌ی عرضی است، انباشته خواهد شد.



شکل ۱. توزیع آهن‌ربایش اسپین‌های ثابت بعد از اعمال تب ۹۰ درجه.

(الف)

مؤلفه‌ی x

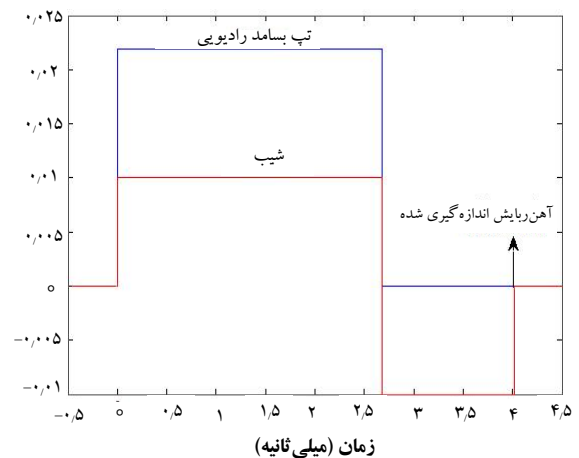


(ب)

با توجه به رابطه‌های ۹ تا ۱۱، برای تب بسامد رادیویی و شیب اعمالی، امکان بررسی توزیع آهن‌ربایش در زمان اعمال تب وجود دارد.

۳.۲ شبیه‌سازی کامپیوتری برای اسپین‌های جاری در طی اعمال تب مستطیلی شکل

شکل ۱ تب بسامد رادیویی و هم‌چنین شیب اعمال شده به اسپین‌های جاری در شبیه‌سازی را نشان می‌دهد. زاویه‌های تلنگر^(۲) مختلف برای تب بسامد رادیویی با استفاده از رابطه‌ی: $\text{flip angle} = \gamma B_1 T$ محاسبه شدند که در آن γ ضریب ژیرومغناطیسی، T مدت زمان اعمال تب و B_1 شدت یا دامنه‌ی تب است. در انجام محاسبات، مقدار γ ، ضریب ژیرومغناطیسی پروتون، برابر با $2.68 \times 10^4 \text{ rad. s}^{-1} \text{ Gauss}^{-1}$ است. هم‌چنین مقدار شدت شیب اعمال شده $0.1 \text{ Gauss cm}^{-1}$ است. مدت زمان اعمال تب در شبیه‌سازی، 2.6794 msec نظر گرفته شد.



شکل ۱. تب انتخابی ۹۰ درجه‌ای برای مطالعه‌ی اثرات جریان (پیکان موجود در شکل، نقطه‌ای از زمان را نشان می‌دهد که مقادیر آهن‌ربایدهی در آن زمان محاسبه شده‌اند).

۳. نتایج

همان‌طور که شکل ۲ نشان می‌دهد توزیع آهن‌ربایش اسپین‌های ثابت بعد از اعمال تب ۹۰ درجه از تقارن بسیار خوبی برخوردار است. شکل ۳ توزیع مؤلفه‌های آهن‌ربایش را برای سرعت-جریان‌های ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰ و ۲۰۰ سانتی‌متر بر ثانیه نشان می‌دهد. جهت جریان جهت z^+ در نظر گرفته شده است. آهن‌ربایش در انتهای تب ۹۰ درجه و در نقطه‌ی نشان داده شده با پیکان در شکل ۱ محاسبه شده است. در سرعت‌های کم‌تر،

چُن یوان و همکاران [۹] با استفاده از روش تفاضل محدود برای حل معادلات بلوخ برای اسپین‌های جاری، آهن‌ربایی‌دهی عرضی پس از اعمال تپ انتخابی برشی برای جریان‌هایی با سرعت‌های مختلف و هم‌چنین زوایای تلنگر در گستره‌ی 0° تا 180° را مورد بررسی قرار دادند. نتایج به دست آمده به وسیله‌ی آن‌ها برای یک ضخامت برشی ثابت نشان داد که: (۱) برای یک زاویه‌ی تلنگر ثابت، تغییر فاز با سرعت به صورت غیرخطی است،

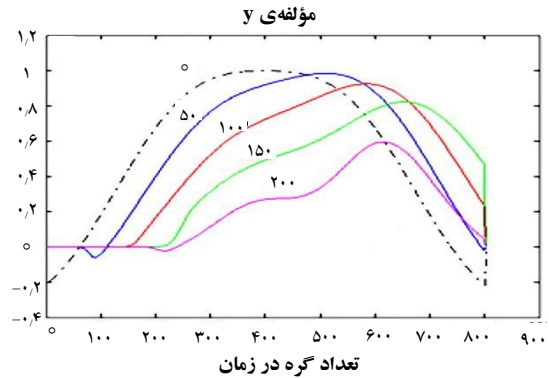
و

(۲) برای یک سرعت ثابت، تغییرات فاز با زاویه‌ی تلنگر به صورت غیرخطی خواهد بود. اگر زاویه‌ی تلنگر کوچک باشد، تغییرات غیرخطی به عنوان تابعی از سرعت بسیار کوچک خواهد بود، اما با افزایش زاویه‌ی تلنگر به ویژه برای زوایای بالاتر از 90° تغییرات غیرخطی محسوس‌تر خواهد شد. یکی از روش‌های پیشنهاد شده که به زاویه‌ی تلنگر وابسته است، کاهش حساسیت فاز نسبت

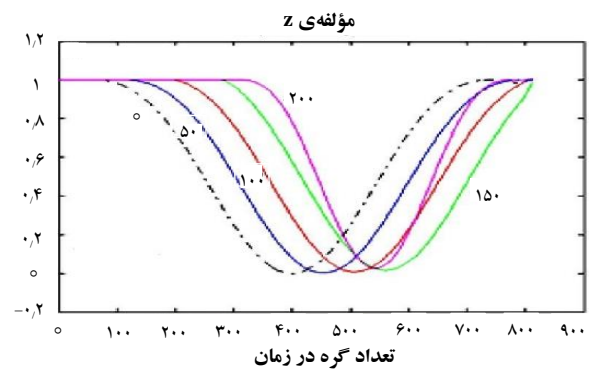
اسپین‌های جاری در طی اعمال تپ انتخابی برشی است، اما مستقل از سرعت جریان خواهد بود که این روش مورد آزمایش، و صحت آن با تصاویر بالینی اثبات شده است [۹]. در این پژوهش همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، مجموع مؤلفه‌های

آهن‌ربایی‌دهی از ابتدا تا انتها به دلیل تقارن صفر است. شکل ۳ توزیع مؤلفه‌های آهن‌ربایی‌دهی را برای جریان‌هایی با سرعت‌های ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰ و ۲۰۰ سانتی‌متر بر ثانیه نشان می‌دهد که با افزایش سرعت جریان، نمایه‌ی مؤلفه‌های آهن‌ربایی‌دهی تغییر شکل خواهند داد. این تغییر شکل و جابه‌جایی نمایه‌ها ناشی از حرکت اسپین‌های تحریک شده در طی اعمال تپ انتخابی برشی است. جریان خون بیش‌ترین تغییر شکل را در نمایه‌های M_x و M_y به وجود آورده است به گونه‌ای که با افزایش سرعت جریان، تقارن این دو نمایه از بین خواهد رفت. اما در نمایه‌ی M_z به جز یک تغییر جهت ایجاد شده در راستای جریان، تغییر چندانی قابل مشاهده نیست.

با مقایسه‌ی نتایج پژوهش‌های پیشین که در آن تپ بسامد رادیویی به صورت تابع سینک بوده است [۶]، می‌توان نتیجه گرفت که در سرعت‌های کم‌تر، حساسیت نمایه‌ی آهن‌ربایی‌دهی اسپین‌های جاری در حالت اعمال تپ به صورت تابع مستطیلی،



(ب)



شکل ۳. توزیع مؤلفه‌های آهن‌ربایی‌دهی اسپین‌های جاری. الف) M_x ، ب) M_y و پ) M_z در سرعت جریان‌های ۵۰، ۱۰۰، ۱۵۰ و ۲۰۰ سانتی‌متر بر ثانیه. جهت جریان در راستای محور Z در نظر گرفته شده است. آهن‌ربایی‌دهی در انتهای تپ 90° درجه و در نقطه‌ی نشان داده شده با پیکان در شکل ۱، محاسبه شده است.

برای اسپین‌های ایستا تعادل آهن‌ربایی‌دهی با فرکانس لارمور و در راستای اعمال میدان مغناطیسی، ثابت خواهد بود. استفاده از میدان مغناطیسی عرضی در امتداد یک محور، برای مثال، عمود بر میدان مغناطیسی ثابت در چارچوب دوار باعث می‌شود که اسپین‌ها با همان بسامد لارمور پیش بروند. اگر تپ بسامد رادیویی که یک اسلایس را انتخاب می‌کند با طیف بسامدی مشخصی اعمال شود، محدوده‌ای از بسامدهای تشدید باعث انتخاب و چرخش صفحه‌ی عرضی خواهند شد. فاز اسپین‌ها بعد از اعمال تپ به وسیله‌ی بسامد اسپین‌های تحریک شده تعیین خواهد شد. برای یک تپ بسامد رادیویی 90° درجه‌ای به شکل تابع سینک که در طی یک شیب انتخاب تپ مثبت که به دنبال یک شیب مجدداً تمرکزدهنده‌ی منفی بعد از خاموش شدن تپ بسامد رادیویی اعمال می‌شود، فازها در سراسر برش متفاوت خواهند بود به طوری که با عبور از صفر در بسامد مرکزی منفی می‌شوند و سپس مثبت خواهند شد به طوری که مجموع فاز مغناطیسی در برش مورد نظر صفر خواهد شد.



نسبت به تابع سینک بیش تر است که احتمالاً می‌توان از آن در راستای کمی‌سازی فضای مویرگی استفاده نمود. به طور کلی با استفاده از روش استفاده شده در این پژوهش می‌توان توزیع آهن رباییده را برای تپ‌هایی با زوایای تلنجر مختلف و هم‌چنین ترکیبی از تپ‌ها به دست آورد که احتمالاً منجر به بهبود مشخصه‌های تصویری نگاره‌های آنژیوگرافی با تشدید مغناطیسی و بررسی بیش تر تأثیر رشته تپ‌های طراحی شده بر روی اسپین‌های جاری خواهد شد.

پی‌نوشت‌ها

1. Artifacts
2. Flip
3. Slice

مرجع‌ها

- [1] J.A. Roberts, S-E. Kim, H-C. Yoon, J.S. McNally, J.R. Hadley, L.K. Findeiss, G.S. Treiman, D.L. Parker, Reproducibility of Lumen and vessel wall measurements in Carotid magnetic resonance imaging, *The Open Cardiovascular and Thoracic Surgery Journal*, 5 (2012) 1-7.
- [2] R. Tyen, D. Saloner, L-D. Jou, S. Berger, MR Imaging of flow through tortuous vessels: A numerical simulation, *Magnetic Resonance in Medicine*, 31 (1994) 184-195.
- [3] J.T. Ngo, P.G. Morris, General solution to the NMR excitation problem for noninteracting spins, *Magnetic Resonance in Medicine*, (2005) DOI: 10.1002/mrm.1910050303.
- [4] P. Mansfield, A.A. Maudsley, P.G. Morris, I.L. Pykett, Selective pulses in NMR imaging: A reply to criticism, *J. Magn. Reson.*, 33 (1979) 261-274.
- [5] J.E. Tanner, E.O. Stejskal, Restricted self-diffusion of protons in colloidal systems by the pulsed-gradient, spin-echo method, *J. Chem. Phys.*, 49 (1968) 1768.
- [6] C. Yuan, G.T. Gullberg, D.L. Parker, The solution of Bloch equations for flowing spins during a selective pulse using a finite difference method, *Medical Physics*, 14 (1987) 914.
- [7] E.O. Stejskal, Use of spin echoes in a pulsed magnetic-field gradient to study anisotropic, restricted diffusion and flow, *Phys.*, 43 (1965) 3597.
- [8] L. Lapidus, G.F. Pinder, Numerical solution of partial differential equations in science and engineering, Wiley, (1982) Chapter 6.
- [9] C. Yuan, G.T. Gullberg, D.L. Parker, Flow-induced phase effects and compensation technique for slice-selective pulses, *Magnetic Resonance in Medicine*, 9 (1989) 161-176.

