



آنتروپی ذرات محصور شده در یک دام یون چار قطبی

الهه اویسی^۱، سعید نوری^{۲*}

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، صندوق پستی: ۳۷۱۶۱۴۶۶۱۱، قم - ایران
۲. پژوهشکده فیزیک و شتاب‌گرها، پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۱۴۱۵۵-۱۳۳۹، تهران - ایران

چکیده: با استفاده از تقریب پتانسیل مؤثر، معادله‌ی شرودینگر برای ذرات محصور شده در یک دام یون چار قطبی حل و ویژه مقدارهای انرژی محاسبه شد. با ایجاد شرایط تعادل برای هنگرد ذرات به دام افتاده، تابع پارش و سپس آنتروپی آن محاسبه شد. این پژوهش می‌تواند در بررسی خواص ترمودینامیکی ذرات محصور شده و نیز در طراحی و ساخت دام‌های یون چار قطبی مفید واقع شود.

کلیدواژه‌ها: دام یون چار قطبی، آنتروپی، تقریب پتانسیل مؤثر

Entropy of the Confined Ions in a Quadrupole Ion Trap

E. Oveisi¹, S. Nouri^{2*}

1. Physics Group, Basic Science, Qom University, P.O.Box: 3716146611, Qom - Iran
2. Research School Physics and Accelerator, Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOI, P.O.Box: 14155-1339, Tehran - Iran

Abstract: By making the effective potential approximation, the Schrödinger equation for confined particles in a quadrupole ion trap was solved and its energy eigenvalues were evaluated. The partition function and then entropy for the ensemble trapped particles in equilibrium were obtained and analyzed. This research can be helpful for investigating the properties of trapped particles and also for designing and construction of quadrupole ion traps.

Keywords: Quadrupole Ion Trap, Entropy, Effective Potential Approximation

*email: snouri@aeoi.org.ir

۱. مقدمه

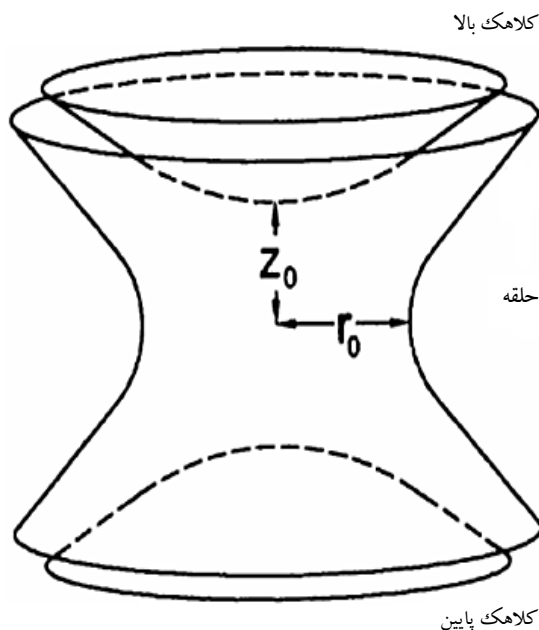
با حل معادله‌ی لاپلاس در مختصات استوانه‌ای و با در نظر گرفتن این نکته که با استفاده از نیروهای صرفاً الکتروستاتیک نمی‌توان یک ذره‌ی باردار را در تعادل پایا نگه داشت می‌توان پتانسیل چار قطبی سه بُعدی وابسته به زمان لازم برای محصورسازی را چنین نتیجه گرفت

$$\phi(x, y, z) = \left(\frac{U_0 - V_0 \cos(\Omega t)}{2r_0^2} \right) (r^2 - 2z^2) \quad (2)$$

که در آن U_0 پتانسیل مستقیم، V_0 و Ω ، به ترتیب، دامنه و بسامد زاویه‌ای پتانسیل الکتریکی نوسانی اعمال شده به الکترودها، r_0 یک مشخصه‌ی ابعادی و $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ است. با اعمال شرایط مرزی، هندسه‌ی الکترودهای موگد پتانسیل مشخص می‌شود

$$\frac{z^2}{z_0^2} - \frac{r^2}{r_0^2} = \pm 1 \quad (3)$$

که در آن، $r_0^2 = 2z_0^2$ است [۲]. این معادله نشان می‌دهد که پتانسیل لازم برای محصورسازی ذرات در یک دام یون چار قطبی را می‌توان به وسیله‌ی یک ساختار سه الکترودی با سطح‌های هذلولوی، شامل دو الکتروده کلاهک به شکل نعلبکی به فاصله $2z_0$ و یک الکتروده حلقه‌ای شکل به شعاع r_0 تولید کرد. این مجموعه نسبت به محور Z متقارن است (شکل ۱).



شکل ۱. ساختار الکترودی دام یون چار قطبی.

با استفاده از روش به‌دام‌اندازی می‌توان ذرات را در یک فضای کوچک محصور ساخت. این، مطالعه‌ی ذرات در شرایط کنترل شده را امکان‌پذیر می‌سازد. روش‌های متنوعی برای به‌دام‌اندازی ذرات وجود دارد که متداول‌ترین آن‌ها استفاده از میدان‌های چار قطبی است. در یک دام چار قطبی می‌توان ذرات باردار دارای نسبت معین جرم به بار را محصور ساخت. نیروی مورد نیاز این محصورسازی از طریق اعمال پتانسیل‌های مستقیم و متناوب با بسامد رادیویی فراهم می‌آید [۱].

از طرفی اطلاع از ویژگی‌های ترمودینامیکی ذرات محصور شده در دام می‌تواند در بررسی خواص این ذرات و همچنین بهبود عملکرد، طراحی و ساخت دام مورد استفاده قرار گیرد. هدف مقاله‌ی حاضر، محاسبه و بررسی آنالیزی ذرات به‌دام افتاده در یک دام یون چار قطبی است. بررسی مشخصه‌های ترمودینامیکی ذرات، نیازمند آن است که سیستم در حالت تعادل ترمودینامیکی باشد. در دستگاهی همانند دام یون چار قطبی که پتانسیل اعمالی وابسته به زمان است، ذرات پیش از قطع پتانسیل اعمالی با بسامد رادیویی به حالت تعادل حرارتی نخواهند رسید. اما با به کارگیری تقریب پتانسیل مؤثر می‌توان پتانسیل سیستم ذرات به‌دام افتاده را مستقل از زمان فرض کرد و در نتیجه شرایطی ایستا برای آن در نظر گرفت.

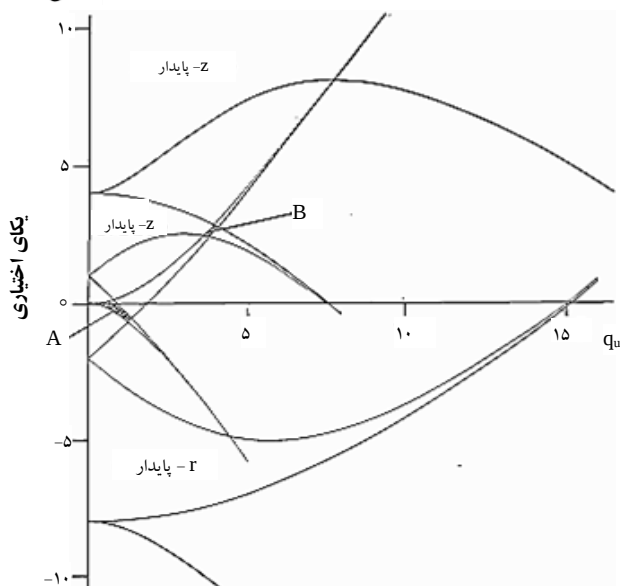
در ادامه، اصول کارکرد دام یون چار قطبی با بسامد رادیویی مورد مطالعه قرار گرفته، با به کارگیری تقریب پتانسیل مؤثر، عملکرد دام از دو دیدگاه کلاسیک و کوانتومی بررسی و آنالیزی ذرات به‌دام افتاده محاسبه شد.

۲. دام یون چار قطبی

ساده‌ترین راه برای محصورسازی ذرات باردار، اعمال نیروی بازگردان خطی است که باعث حرکت نوسانی ذرات حول نقطه تعادل خواهد شد. پتانسیل سهموی وابسته به این نیرو در سه بُعد، این است

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2) \quad (1)$$

که در آن m و ω ، به ترتیب، جرم و بسامد زاویه‌ای ذره، و x, y و z مختصات مکانی آن نسبت به مرکز دام است.



شکل ۲. ناحیه‌های پایداری در دو راستای I و Z در دام یون. ناحیه‌ی اول و دوم پایداری، به ترتیب، با حروف A و B نشان داده شده است.

تشخیص پایداری یا ناپایداری حرکت، نیازمند رابطه بین مختصات مکان و زمان ذره است. تا زمانی که I و Z که مکان ذره از مرکز دام را مشخص می‌کنند، به ترتیب، کوچک‌تر از Z_0 و I_0 باشند، ذره می‌تواند بدون برخورد به بدنه‌ی الکترودهای دام حرکت پایدار داشته باشد. در غیر این صورت، ذره به بدنه‌ی داخلی الکترودهای دام برخورد کرده و تلف می‌شود. جواب‌های معادله‌ی حرکت برحسب پارامترهای پایداری a_u و q_u ، شامل مجموعه‌ای از نواحی پایداری و ناپایداری برای مسیر حرکت ذره در هر یک از راستاهای I و Z است. به عبارت دیگر، جواب پایدار، توصیف‌کننده‌ی حرکت ذره در دام بدون برخورد با بدنه‌ی الکترودها است. در ناحیه‌های ناپایداری، در یکی از راستاهای I و Z یا هر دو راستا، دامنه‌ی حرکت افزایش می‌یابد تا ذره به الکترودها برخورد کرده و تلف شود [۱] (شکل ۳).

۳. عملکرد دام یون در تقریب پتانسیل مؤثر

بررسی رفتار مکانیکی ذره در یک میدان نوسانی سریع در چارچوب مکانیک کلاسیک منجر به صورت‌بندی حرکت ذره با استفاده از تقریب پتانسیل مؤثر شد [۴]. دام یون چار قطبی از جمله‌ی دستگاه‌هایی است که به علت داشتن بسامد رادیویی بالا (در حدود چند مگاهرتز) می‌تواند با استفاده از این تقریب مورد مطالعه قرار گیرد.

در میدان چار قطبی سه بُعدی که در دام یون به وجود می‌آید ذرات تحت تأثیر پتانسیل مشخص شده به وسیله‌ی رابطه‌ی (۲) قرار گرفته و در راستای شعاعی و محوری نوسان می‌کنند. در نیم دوره‌ی تناوب، به دام‌اندازی در راستای محوری، پایدار، ولی در صفحه‌ی شعاعی ناپایدار خواهد بود. در نیم دوره‌ی بعد، وضعیت پایداری عکس می‌شود. به علت ناهمگنی میدان، متوسط نیرو در یک دوره‌ی تناوب صفر نمی‌شود، اما جهت نیرو به سمت نواحی با میدان ضعیف که همان مرکز دام است خواهد بود. با توجه به این که در مرکز دام هیچ‌گونه تغییر میدان وجود ندارد، هیچ حرکت ناشی از میدان بسامد رادیویی وجود نخواهد داشت. در شرایط آرمانی، ذره‌ای که در مرکز دام قرار می‌گیرد ساکن باقی می‌ماند.

معادله‌های حرکت برای ذره‌ی محصور شده به جرم m و بار e ، در هر یک از راستاهای I و Z را می‌توان به طور جداگانه از روی معادله‌های نیروی مربوط، چنین به دست آورد

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + \left(\frac{e}{mr_0}\right)(U_0 - V_0 \cos(\Omega t))r = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - \left(\frac{ze}{mr_0}\right)(U_0 - V_0 \cos(\Omega t))z = 0 \quad (4)$$

با تغییر متغیر $\xi = \frac{\Omega t}{\gamma}$ و معرفی پارامترهای بدون بُعد $\alpha_u = \alpha_z = -\gamma \alpha_r = \frac{-\lambda e U_0}{mr_0^2 \Omega^2}$ و $q_u = q_z = -\gamma q_r = \frac{-\lambda e V_0}{mr_0^2 \Omega^2}$ معادله‌ی حرکت چنین خواهد بود

$$\frac{d^2 u}{d\xi^2} + (\alpha_u - \gamma q_u \cos(\gamma \xi))u = 0 \quad (5)$$

که در آن u نشان‌دهنده‌ی مختصات I و Z است.

معادله‌ی (۵) یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه دوم معروف به معادله‌ی ماتیو است [۳]. جواب این معادله را می‌توان برحسب ناحیه‌های پایداری و ناپایداری تشریح نمود که این ناحیه‌ها برای توصیف مسیر حرکت ذرات محصور شده و تعیین حدود پایداری آن‌ها بسیار مناسب است (شکل ۲).



معادله (۸) شامل جمله‌های نیروی مربوط به دو جابه‌جایی X و ε است و معادله‌ی نیرو برای هر دو حرکت به طور جداگانه نیز برقرار است. ابتدا حرکت نوسانی را در نظر می‌گیریم. کمیت ε متناسب با کمیت Ω است و بنابراین مقدار قابل توجهی دارد اما از دو جمله‌ی دیگر که شامل کمیت کوچک ε هستند می‌توان صرف‌نظر کرد. بنابراین

$$m \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = f. \quad (9)$$

با توجه به این که مقدار متوسط تابع‌های $\frac{d^2 \varepsilon}{dt^2}$ و f در یک دوره‌ی تناوب برابر صفر است، اما تابع X در طی این زمان به آرامی تغییر می‌کند، متوسط زمانی رابطه‌ی (۸) در دوره‌ی تناوب $2\pi/\Omega$ به رابطه‌ی زیر می‌انجامد

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = -\frac{dU}{dX} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial X} = -\frac{dU}{dX} - \frac{1}{m\Omega^2} f \frac{\partial f}{\partial X} \quad (10)$$

می‌توان معادله (۱۰) را چنین بازنویسی کرد

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{dV_{eff}}{dX} \quad (11)$$

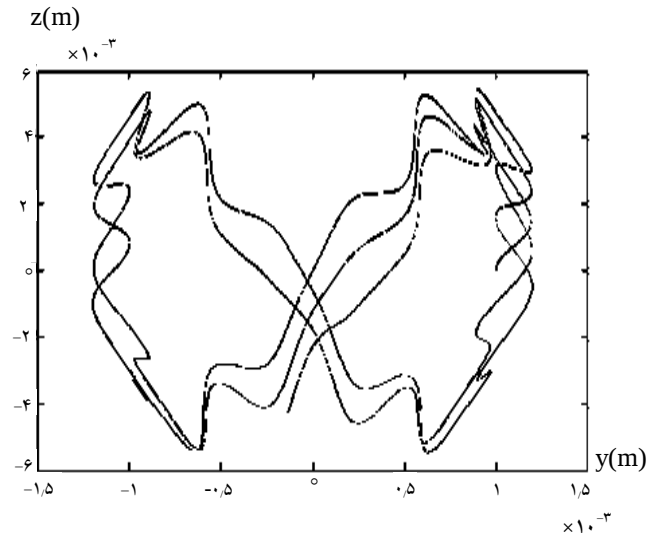
که در آن انرژی پتانسیل مؤثر چنین تعریف می‌شود

$$V_{eff} = U + \frac{f(x)^2}{2m\Omega^2} \quad (12)$$

یعنی اگر ذره‌ای تحت اثر نیروی $\vec{f}(\vec{x}, t)$ با بسامد بالا قرار داشته باشد، به گونه‌ای حرکت می‌کند که گویی تحت تأثیر پتانسیل مؤثر مستقل از زمان (۱۲) قرار دارد. در مورد ذره‌ی به دام افتاده در دام یون چار قطبی، نیرو به صورت خطی kx است و معمولاً $U(x)$ ، صفر در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس پتانسیل مؤثر چنین خواهد بود

$$V_{eff}(x) = \frac{k^2 x^2}{2m\Omega^2} \quad (13)$$

$$k = \frac{eV_0}{r_0^2} \quad \text{که در آن}$$



شکل ۳. مسیر حرکت ذره‌ی به دام افتاده در دام یون چار قطبی در فضای مکان با مشخصه‌های $a_z = 0$ و $q_z = 0.4$.

ذره‌ای به جرم m را در نظر می‌گیریم که تحت اثر نیروی وابسته به زمان و با بسامد بالای $\vec{f}(\vec{x}, t) = \vec{f}(\vec{x}) \cos(\Omega t)$ است. میدان نوسانی وابسته به این نیرو را بسیار سریع می‌گیریم به نحوی که، اگر ω بسامد کلی حرکت ذره باشد، آن‌گاه $\Omega \gg \omega$. هم‌چنین فرض می‌کنیم این ذره، در یک پتانسیل مستقل از زمان $U(x)$ جابه‌جا می‌شود. مقدار $\vec{f}(\vec{x}, t)$ نسبت به نیروی ناشی از پتانسیل $U(x)$ کوچک فرض نمی‌شود اما $\varepsilon(t)$ ، میزان جابه‌جایی ناشی از نوسان با بسامد وابسته به زمان $\cos(\Omega t)$ را کوچک در نظر می‌گیریم. معادله‌ی نیرو برای چنین دستگاهی این است

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{du}{dx} + f. \quad (6)$$

حرکت ذره را می‌توان به صورت مجموع دو حرکت هم‌زمان آرام و نوسانی در نظر گرفت

$$x(t) = X(t) + \varepsilon(t), \quad X(t) \gg \varepsilon(t) \quad (7)$$

که در آن، $X(t)$ حرکت آرام ذره را توصیف می‌کند و $\varepsilon(t)$ نمایانگر نوسان‌های ریز ذره است. با جانشانی رابطه‌ی (۷) در رابطه‌ی (۶) و بسط جملات نیرو تا مرتبه‌ی اول حول $X(t)$ داریم

$$m \frac{d^2 X}{dt^2} + m \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} = -\frac{dU}{dX} - \varepsilon \frac{d^2 U}{dX^2} + f + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial X} \quad (8)$$



چون پتانسیل نوسان گر هماهنگ ساده به صورت $\omega^2 x^2 / 2$ است، بسامد زاویه ای طبیعی نوسان گر $(\omega = \omega_x = \omega_y = \omega_z / 2)$ چنین می شود

$$\omega = \frac{eV_0}{r_0^2 m \Omega} \quad (19)$$

مثلاً برای ذره ی یک بار یونیده با جرم ۷۵ واحد جرم اتمی که درون دامی با مشخصه های $r_0 = 1 \text{ cm}$ با بسامد زاویه ای 10^7 رادیان بر ثانیه، $V_0 = 100 \text{ V}$ و $U_0 = 0$ محصور شده است، مقدار بسامد زاویه ای طبیعی دستگاه برابر 10^5 رادیان بر ثانیه خواهد بود.

۴. محاسبه ی آنتروپی ذرات به دام افتاده در تقریب پتانسیل مؤثر

با توجه به این که پتانسیل وابسته به زمان اعمال شده به الکترودهای دام یون چار قطبی، دارای بسامد بسیار بالایی است، تقریب پتانسیل مؤثر با دقت خوبی قابل به کارگیری است. هامیلتونی ذره ی به دام افتاده در دام تحت پتانسیل مؤثر عبارت است از

$$H(x, y, z) = \frac{Px^2}{2m} + \frac{Py^2}{2m} + \frac{Pz^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 + \frac{1}{2} m (\omega)^2 z^2 \quad (20)$$

که ویژه مقادیر انرژی آن برابر است با

$$E_{l,m,n} = \hbar \omega (l + \frac{1}{2}) + \hbar \omega (m + \frac{1}{2}) + 2 \hbar \omega (n + \frac{1}{2}) \quad (21)$$

که در آن، l ، m و n ، به ترتیب، اعداد کوانتومی وابسته به x ، y و z هستند.

برای هنگردی از ذرات یکسان و تمایز پذیر و با چگالی پایین به دام افتاده در دام یون چار قطبی، تابع پارش در راستای هر یک از محورهای مختصات را می توان چنین نوشت [۶]

$$Z(T, V, N) = \sum_{i=0}^{\infty} \exp(-\beta E_i) = [2 \sinh(\frac{\beta \hbar \omega}{2})]^{-N} \quad (22)$$

از دیدگاه مکانیک کوانتومی، با در نظر گرفتن پتانسیل وارد بر ذره به صورت

$$V(\vec{x}, t) = V(\vec{x}) \cos(\Omega t) \quad (14)$$

معادله ی شرودینگر به شکل زیر در می آید

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{x}) \cos(\Omega t) \psi. \quad (15)$$

اگر بسامد Ω خیلی بزرگ باشد، برآیند تأثیر پتانسیل در حرکت ذره ناچیز است زیرا میانگین آن در بازه ی زمانی کوچک $2\pi/\Omega$ برابر صفر خواهد بود. با این وجود اثر کوچک پتانسیل، قابل چشم پوشی نیست.

تابع موج کل با در نظر گرفتن مجموع انرژی های جنبشی و پتانسیل چنین نوشته می شود [۵]

$$\psi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x}, t) \exp[-iV(\vec{x}) \frac{\sin(\Omega t)}{\hbar \Omega}] \quad (16)$$

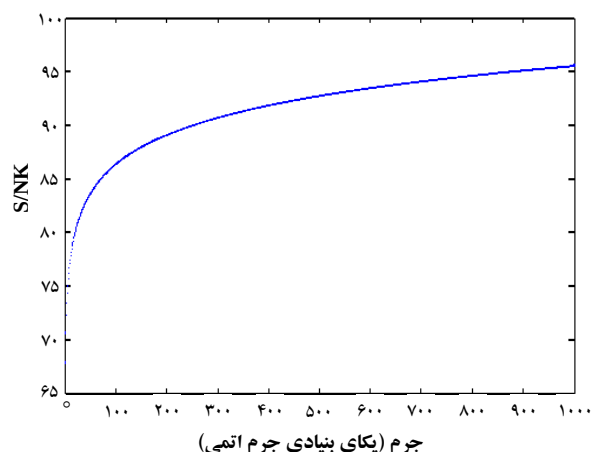
که در آن $\phi(\vec{x}, t)$ تابعی با تغییرات آرام نسبت به زمان است به طوری که $P(\vec{x}, t) = |\phi(\vec{x}, t)|^2$ تابع توزیع احتمال مکانی ذره در لحظه ی t است. با قرار دادن رابطه (۱۶) در معادله ی شرودینگر (۱۵) و میانگین گیری زمانی در بازه ی زمانی کوچک $2\pi/\Omega$ داریم

$$i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi + V_{\text{eff}}(\vec{x}) \phi \quad (17)$$

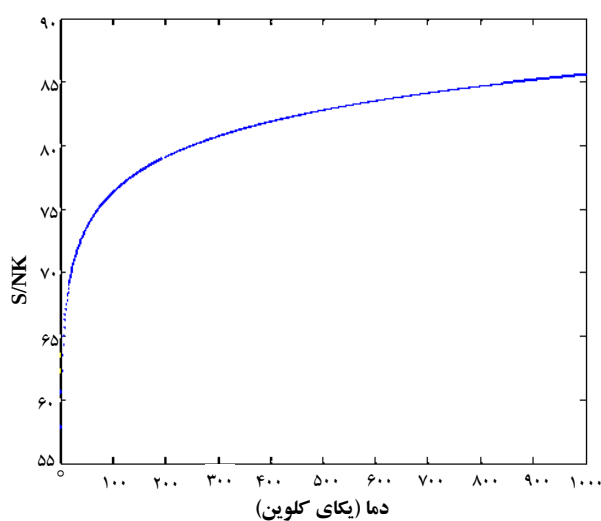
که در آن، $V_{\text{eff}}(\vec{x}) = \frac{\nabla V(\vec{x}) \cdot \nabla V(\vec{x})}{4m\Omega^2}$ پتانسیل مؤثر مستقل از زمان است که ذره در آن جابه جا می شود. با در نظر گرفتن $\vec{f}(\vec{x}, t)$ به صورت منفی گرادیان پتانسیل $V(\vec{x})$ ، پتانسیل مؤثر V_{eff} معادل کلاسیکی رابطه ی (۱۲) خواهد شد که این بیان گر اصل تطابق در مکانیک کوانتومی است.

در مورد خاص یک دام یون چار قطبی، هامیلتونی دستگاه این است

$$H = \frac{Px^2}{2m} + \frac{Py^2}{2m} + \frac{Pz^2}{2m} + \frac{1}{2} k \cos(\Omega t) x^2 + \frac{1}{2} k \cos(\Omega t) y^2 - k \cos(\Omega t) z^2 \quad (18)$$



شکل ۴. رابطه بین آنتروپی ذرات به دام افتاده و جرم در دمای ۳۰۰K.



شکل ۵. تغییرات آنتروپی ذرات به دام افتاده، با دما.

همان گونه که در این نمودارها مشاهده می‌شود آنتروپی ذرات با افزایش جرم و دما با آهنگی مشابه یک‌دیگر افزایش می‌یابد. در واقع با افزایش جرم و دمای ذرات محصور شده، احتمال برخورد بین ذرات افزایش می‌یابد و در نتیجه آنتروپی بیش‌تر می‌شود.

با توجه به کاربردهای فراوان دام‌های یون در شاخه‌های مختلف علوم و مهندسی، این پژوهش می‌تواند در بررسی خواص ترمودینامیکی ذرات محصور شده و نیز در عملکرد، طراحی و ساخت این دام‌ها مفید واقع شود. برای مثال با توجه به نوع توزیع این ذرات در درون حجم دام، می‌توان طراحی بهتری به ویژه در مورد الکترودهای کلاهیگ اعمال کرد به گونه‌ای که خروجی دستگاه بهینه شود.

که در آن، T ، V ، N ، به ترتیب، دما، حجم و تعداد ذرات و $\beta = 1/KT$ است. از این رو تابع پارش در سه بُعد، این است

$$Z(T, V, N) = \gamma^{-3N} [\sinh(\frac{\beta \hbar \omega}{2})]^{-3N} [\sinh(\beta \hbar \omega)]^{-N} \quad (23)$$

با استفاده از تابع پارش می‌توان تابع انرژی آزاد هلمهولتز را چنین محاسبه کرد

$$\begin{aligned} F(T, V, N) &= -KT \ln(Z) \\ &= 3N \hbar \omega + 3NKT \ln[1 - \exp(-\beta \hbar \omega)] \\ &\quad + NKT \ln[1 - \exp(-2\beta \hbar \omega)] \end{aligned} \quad (24)$$

آنتروپی ذرات به دام افتاده در این است

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial F}{\partial T} \\ &= NK \left[\frac{3\beta \hbar \omega}{\exp(\beta \hbar \omega) - 1} - 3 \ln\{1 - \exp(-\beta \hbar \omega)\} \right] \\ &\quad + NK \left[\frac{2\beta \hbar \omega}{\exp(2\beta \hbar \omega) - 1} - \ln\{1 - \exp(-2\beta \hbar \omega)\} \right] \end{aligned} \quad (25)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۹) بسامد ذاتی نوسان‌گر به جرم ذرات محصور شده وابسته است. در شکل ۴ تغییرات آنتروپی برحسب جرم برای دستگاهی شامل 10^6 ذره‌ی یک‌بار یونیده در دمای ۳۰۰K در درون دمای با مشخصه‌های $r_0 = 1 \text{ cm}$ ، با بسامد زاویه‌ای 10^7 رادیان بر ثانیه، $V_0 = 100 \text{ V}$ و $U_0 = 0$ رسم شده است. در این نمودار، جرم برحسب یکای بنیادی جرم اتمی در نظر گرفته شده است.

آنتروپی ذرات با افزایش جرم روند صعودی دارد و در نهایت به یک مقدار ثابت میل می‌کند. با توجه به این که آنتروپی سیستم معرف بی‌نظمی آن است، ذرات سنگین‌تر با افزایش اغتشاشات داخلی ناشی از برخوردها سبب بالا رفتن میزان بی‌نظمی سیستم و افزایش آنتروپی می‌شوند.

در شکل ۵ تغییرات آنتروپی با دما نمایش داده شده است. در این نمودار جرم ذرات، ۷۵ واحد جرم اتمی در نظر گرفته شده است. با افزایش دمای سیستم، انرژی جنبشی ذرات محصور شده افزایش می‌یابد و ذرات با سرعت بیش‌تری فضای دام را می‌پیمایند. بنابراین با افزایش برخوردهای بین ذرات، بر میزان بی‌نظمی سیستم افزوده می‌شود و آنتروپی روندی صعودی طی می‌کند.



مرجع ها

1. R.E. March, J.F. Todd, Quadrupole Ion Trap Mass Spectrometry, Wiley-Interscience, N.Y. (2005).
2. R.E. March, An introduction to quadrupole ion trap mass spectrometry, J. Mass Spectrom, 32, 351 (1997).
3. N.W. McLachlan, Theory and application of Mathieu functions, Dover. N.Y. (1964).
4. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Mechanics, Pergamon Press (1969).
5. R.J. Cook, D.G. Shankland, A.L. Wells, Quantum theory of particle motion in a rapidly oscillating field, Phys. Rev. A. 31 (1985) 564.
6. W. Greiner, L. Neise, H. Stöcker, Thermodynamics and Statistical Mechanics, Springer (1995).