



حل معادله‌ی پخش نوترون با استفاده از روش بدون مش بر پایه‌ی تابع‌های شعاعی وندلند در مختصات دو بعدی کارتزین

بهروز رکرک^{۱*}، عبدالحمید مینوچهر^۱، احمد رضا ذوالفقاری^۱، امیر موافقی^۲
۱. دانشکده مهندسی هسته‌ای، دانشگاه شهید بهشتی، صندوق پستی: ۱۹۸۳۹۶۳۱۱۳، تهران - ایران
۲. پژوهشگاه علوم و فنون هسته‌ای، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۸۳۶-۱۴۳۹۵، تهران - ایران

چکیده: امروزه در حوزه‌ی تحلیل عددی و علوم محاسباتی پژوهش‌های گسترده‌ای در زمینه‌ی استفاده از روش‌های بدون مش در حال انجام است. در این مقاله از یک روش بدون مش بر پایه‌ی درون‌یابی نقطه‌ای برای حل معادله‌ی پخش یک-گروهی نوترون در مختصات دو بعدی کارتزین استفاده شده است. برای درون‌یابی، از تابع‌های شعاعی وندلند استفاده شد. از روش گالرکین برای گسسته‌سازی شکل ضعیف معادله‌ی پخش نوترون استفاده شد و انتگرال‌های موجود در معادله با روش عددی گوس-لژاندر محاسبه شدند. برای ارزیابی روش معرفی شده، نمونه‌های مختلفی از معادله‌ی پخش نوترون در دو بعد حل و نتایج با پاسخ تحلیلی مقایسه شد. در مواردی که پاسخ تحلیلی وجود نداشت، مسئله با کد محاسباتی سایتیشن شبیه‌سازی و نتایج مقایسه شد. برای ارزیابی کارایی روش، مسئله‌ی آزمون رید حل شد. به عنوان یک مسئله‌ی کاربردی، معادله‌ی پخش نوترون برای ربع قلب یک رآکتور آب تحت فشار (PWR) در دو بعد حل شد. هم‌چنین ترکیب تابع‌های شعاعی مختلف وندلند با تابع‌های چندجمله‌ای از نظر دقت نتایج با یک‌دیگر مقایسه شدند. مقایسه‌ی نتایج به دست آمده با پاسخ‌های تحلیلی و نتایج حاصل از شبیه‌سازی با کد سایتیشن نشان داد که روش استفاده شده از دقت و کارایی مطلوبی برخوردار است و می‌تواند برای تولید کدهای هسته‌ای مورد استفاده قرار گیرد.

کلیدواژه‌ها: معادله‌ی پخش نوترون، روش بدون مش، تابع‌های پایه شعاعی وندلند، روش گالرکین

Application of a Mesh Free Method Based on the Wendland Radial Basis Functions to Solve the Neutron Diffusion Equation in Two-Dimensional Geometry

B. Rokrok^{*1}, H. Minuchehr¹, A. Zolfaghari¹, A. Movafeghi²

1. Nuclear Engineering Department, Shahid Beheshti University, P.O.Box: 1983963113, Tehran – Iran
2. Nuclear Science and Technology Research Institute, AEOL, P.O.Box: 14395-836, Tehran – Iran

Abstract: These days, application of mesh free methods in the areas of numerical analysis and computational sciences has been the subject of many researches. In this paper, the mesh free method based on the point interpolation scheme is used to solve the one-group neutron diffusion equation in a two-dimensional Cartesian coordinate system. The Wendland type radial basis functions were applied to perform the interpolations. The Galerkin method was employed to discretise the weak form of the neutron diffusion equation. In order to calculate the integrations of the weak form of the equations, Gauss-Legendre scheme was applied. The efficiency and accuracy of the method was evaluated through a number of case studies. The results were compared with the analytical solutions. For the cases where the numerical solutions did not exist, the problem was simulated through the Citation code and the results were compared, accordingly. The Reed test problem was solved to show the performance of the developed code. A PWR reactor core was also simulated through the introduced method. The effect of combination of different Wendland functions with polynomial functions on the accuracy of the results was also assessed. There is a good agreement between the numerical and the analytical solutions, and also the result from the Citation code revealed the accuracy of the method, and the good performance of the applied method was also confirmed in this study. At last, the developed method introduced in this work was found to be applicable to implement the desired nuclear computational codes.

Keywords: Neutron Diffusion Equation, Mesh Free Method, Wendland Radial Basis Functions, Galerkin Method

*email: brokrok@aeoi.org.ir



۱. مقدمه

روش‌های موجود تحلیل عددی مانند تفاضل محدود، اجزای محدود و اجزای مرزی، برای حل مسایل به مش‌های از پیش تعریف شده متکی هستند. در این روش‌ها (روش‌های وقفی)، مش‌بندی و تغییر مش به ویژه در فضای سه بعدی از پیچیدگی بالایی برخوردار است که گاهی اوقات پیچیده‌ترین بخش مسئله نیز محسوب می‌شود.

امروزه پژوهش‌های زیادی در زمینه‌ی کاربرد روش‌های بدون مش در شاخه‌های مختلفی از علوم و مهندسی در حال انجام هستند [۱، ۲]. روش‌های بدون مش در صورت برخورداری از دقت مطلوب می‌توانند به عنوان جای‌گزینی برای روش‌های استاندارد شده‌ی فعلی مورد استفاده قرار گیرند. در روش‌های بدون مش از مجموعه‌ای از نقاط برای نمایش دامنه و حل مسئله استفاده می‌شود. از جمله ویژگی‌های اصلی روش‌های بدون مش می‌توان به مواردی مانند: نداشتن محدودیت‌های حاصل از مش‌بندی، نمایش دقیق دامنه در مسایل با هندسه‌ی پیچیده و سهولت افزایش یا کاهش تعداد نقاط در دامنه‌ی مسئله را نام برد.

عبارت «بدون مش» بر توانایی این روش‌ها در تقریب یا درونیابی متغیر موردنظر با استفاده از مجموعه‌ای از نقاط بدون هیچ‌گونه ارتباط از پیش تعیین شده بین آن‌ها دلالت دارد. تاکنون چندین روش بر این اساس ابداع شده‌اند که از آن جمله می‌توان به روش‌های هیدرودینامیک نقاط هموار شده (SPH)^(۱) [۳]، روش بدون اجزای گالرکین (EFGM)^(۲) [۴]، روش باز تولید نقاط با هسته (RKPM)^(۳) [۵]، روش ابر HP^(۴) [۶]، روش اجزای محدود تعمیم یافته (GFEM)^(۵) [۷]، روش تقسیم‌بندی واحد (PUM)^(۶) [۸] و روش درونیابی نقطه‌ای (PIM)^(۷) [۹] به عنوان شناخته شده‌ترین آن‌ها اشاره کرد.

روش‌های بدون مش معمولاً براساس روش فرمول‌بندی معادله‌ها (شکل ضعیف، شکل قوی و یا ترکیبی از شکل‌های قوی و ضعیف) و یا براساس روش تقریب / درونیابی طبقه‌بندی می‌شوند. روش‌هایی که بر شکل ضعیف معادله‌ها استوارند، نیاز به انتگرال‌گیری دارند. در این روش‌ها معمولاً به منظور انتگرال‌گیری، دامنه‌ی مسئله به سلول‌های کوچک‌تری شکسته می‌شود. این سلول‌ها معمولاً به شکل ساده‌ی مربعی انتخاب می‌شوند و بین نقاط مورد استفاده در دامنه و سلول‌های انتگرال‌گیری ارتباط و وابستگی وجود ندارد. در روش‌هایی که بر شکل قوی معادله‌ها استوارند، انتگرال‌گیری وجود ندارد و از این رو

نیازی به سلول‌های انتگرال‌گیری هم نیست. اخیراً از روش‌های مبتنی بر شکل ضعیف معادله‌ها به طور گسترده‌تری استفاده می‌شود که دلیل آن پایداری بیش‌تر این روش‌ها است [۱۰]. در طبقه‌بندی براساس روش تقریب / درونیابی، تقریب تابع به روش کم‌ترین مربع‌ها با ضریب‌های غیر ثابت (MLS)^(۸) و درونیابی تابع به روش درونیابی نقطه‌ای (PIM) از پرکاربردترین این روش‌ها هستند. در روش MLS، تابع‌های شکل مورد استفاده خاصیت تابع دلتای کرونکر را دارا نیستند؛ لذا برای برآورده شدن شرایط مرزی ضروری باید از روش‌های خاصی مانند ضریب‌های لاگرانژ استفاده کرد [۱۱]. در روش PIM برخلاف روش MLS، تابع‌های شکل دارای ویژگی تابع دلتای کرونکر هستند. دارا بودن این ویژگی باعث می‌شود که شرایط مرزی ضروری به سهولت و به طور دقیق برآورده شوند. در روش PIM برای درونیابی می‌توان از تابع‌های پایه به صورت چندجمله‌ای یا از تابع‌های نوع شعاعی (RBF)^(۹) استفاده نمود. استفاده از تابع‌های پایه چندجمله‌ای در مواردی باعث ایجاد مسئله‌ی تکنیکی^(۱۰) می‌شود (به دلیل نزدیک بودن نقاط دامنه به یک‌دیگر و یا به نقاط انتگرال‌گیری) که این مسئله در صورت استفاده از تابع‌های شعاعی تا حد زیادی مرتفع می‌شود [۱۰].

روش‌های بدون مش تاکنون برای بسیاری از مسایل مهندسی در شاخه‌هایی هم‌چون مکانیک و برق به کار گرفته شده‌اند. نویسندگان این مقاله پیش از این به حل معادله‌ی پخش نوترون به روش بدون مش در مختصات یک بعدی و با استفاده از تابع‌های شعاعی عمومی پرداختند [۱۲]. در این مقاله با توجه به این که مفهوم واقعی روش‌های بدون مش بیش‌تر در مختصات دو و سه بعدی نمود پیدا می‌کند، روش ارائه شده به مختصات دو بعدی (x-y) تعمیم داده شده و قلب رآکتور PWR نیز به صورت دو بعدی شبیه‌سازی شد. علاوه بر این به جای تابع‌های شعاعی عمومی از تابع‌های شعاعی وندلند با پشتیبانی فشرده که دارای ویژگی مثبت قطعی نیز هستند استفاده شد و دقت نتایج حاصل از به کارگیری تابع‌های مختلف وندلند و ترکیب آن با تابع‌های چندجمله‌ای درجه یک و دو مورد ارزیابی قرار گرفتند. این چندجمله‌ای‌ها به منظور بهبود ویژگی‌های تابع‌های شعاعی به آن‌ها الحاق می‌شوند. در روش مورد استفاده از شکل ضعیف معادله‌ی پخش نوترون و از روش گالرکین برای گسسته‌سازی معادلات استفاده شد. برای محاسبه‌ی انتگرال‌های موجود در شکل ضعیف از روش انتگرال‌گیری عددی گوس- لژاندر

۱.۲ تابع‌های پایه شعاعی

در ده‌های اخیر تابع‌های پایه شعاعی (RBFs) ابتدا به طور موفقیت‌آمیز در طیف گسترده‌ای از مسایل درونیابی براساس نقطه‌های دامنه [۱۴]، سپس در کاربرد جدیدتری در حل معادله‌های دیفرانسیلی به کار گرفته شده‌اند [۱۵]. در تابع‌های شعاعی، متغیر تنها تابع فاصله بین نقطه‌ی مورد توجه و نقطه‌های دامنه است ($r = \|x - x_i\|$). تاکنون انواع مختلفی از تابع‌های شعاعی معرفی شده‌اند. یکی از مجموعه تابع‌های معروف و پرکاربرد شعاعی تابع‌های وندلند هستند که به نام پایه‌گذارشان نام‌گذاری شده‌اند. این تابع‌ها دارای ویژگی پشتیبانی فشرده و مثبت قطعی در فضای R^5 و درجه‌ی همواری C^k هستند. ویژگی‌های این تابع‌ها به وسیله‌ی وندلند [۱۶] مورد بحث قرار گرفته‌اند. در فضای R^3 و برای درجه‌ی همواری C^2 ، C^4 و C^6 این تابع‌ها به صورت زیر هستند [۱۶]

$$R(r) = (1 - \frac{r}{\delta})^6 (1 + 6\frac{r}{\delta}) \quad (2) \text{ (وندلند } C^2)$$

$$R(r) = (1 - \frac{r}{\delta})^6 (3 + 18\frac{r}{\delta} + 35(\frac{r}{\delta})^2) \quad (3) \text{ (وندلند } C^4)$$

$$R(r) = (1 - \frac{r}{\delta})^6 (1 + 8\frac{r}{\delta} + 25(\frac{r}{\delta})^2 + 32(\frac{r}{\delta})^3) \quad (4) \text{ (وندلند } C^6)$$

که در آن‌ها δ نشان‌دهنده‌ی دامنه‌ی پشتیبانی این تابع‌ها است و در فاصله‌ی دورتر از این مقدار، اندازه‌ی تابع‌ها برابر صفر قرار داده می‌شود.

۲.۲ تابع‌های شکل

در روش درونیابی نقطه‌ای به وسیله تابع‌های شعاعی، تابع درونیابی شده را می‌توان چنین در نظر گرفت

$$\phi^h(x) = \sum_{i=1}^n R_i(r) \lambda_i + \sum_{k=1}^m P_k(x) b_k = R^T(r) \lambda + P^T(x) b \quad (5)$$

که در آن $R_i(r)$ تابعی شعاعی، n تعداد تابع‌های شعاعی، $P_k(x)$ یک چندجمله‌ای و m تعداد تابع‌های چندجمله‌ای است و λ_i و b_k ضرایب‌های مجهول هستند که برای محاسبه‌ی تابع‌های شکل باید تعیین شوند. استفاده از چندجمله‌ای $P_k(x)$ در معادله‌ی (۵) همواره ضرورت ندارد؛ لکن مطالعات بر روی این تابع‌ها نشان داده‌اند که افزودن این جمله برخی از خواص درونیابی مثلاً درونیابی یک تابع خطی را بهبود می‌بخشد [۱۰]. در این پژوهش تابع‌های شعاعی با افزودن تابع‌های پایه‌ی درجه یک و نیز درجه دو استفاده شده‌اند.

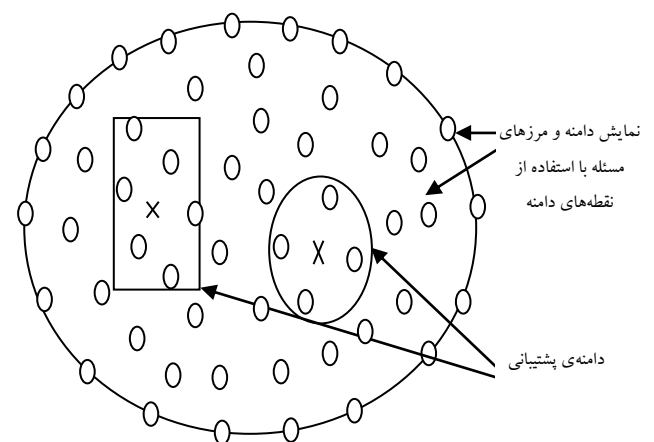
استفاده شد. پیاده‌سازی روش با برنامه‌نویسی در محیط Matlab انجام شد. برای ارزیابی دقت روش، نتایج با حل تحلیلی مقایسه شدند و برای مواردی که حل تحلیلی موجود نبود از شبیه‌سازی توسط کد محاسباتی سائیتشن [۱۳] استفاده شد.

۲. روش بدون مش با استفاده از درونیابی نقطه‌ای

در روش‌های بدون مش از نقاط توزیع شده در دامنه‌ی مسئله برای درونیابی/تقریب استفاده می‌شود. برای این منظور در هر نقطه‌ی مورد توجه (x) ، تابع $\phi(x)$ با استفاده از مقادیر تابع در تعدادی از نقطه‌های دامنه که در همسایگی محلی (دامنه‌ی پشتیبانی) نقطه مورد توجه هستند، به صورت زیر درونیابی می‌شود

$$\phi^h(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \phi_i = N^T(x) \phi_s \quad (1)$$

که در آن ϕ^h مقدار درونیابی شده‌ی تابع (تابع تقریب)، n تعداد نقاط در دامنه‌ی پشتیبانی نقطه‌ی x ، ϕ_i مقدار تابع در نقاط دامنه و $N_i(x)$ تابع شکل متناظر در نقطه‌ی i است و N^T و ϕ_s نیز نمایش برداری تابع‌های شکل و مقدارهای تابع در نقاط دامنه هستند. دامنه‌ی پشتیبانی در نقطه‌ی x تعداد نقاطی از نقاط دامنه را که برای درونیابی/تقریب مقدار تابع در نقطه‌ی x مورد استفاده قرار می‌گیرند مشخص می‌کند. دامنه‌ی پشتیبانی همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است می‌تواند دارای شکل‌ها و ابعاد مختلفی باشد. ابعاد دامنه‌ی پشتیبانی که معمولاً بین ۲ تا ۳ برابر فاصله‌ی متوسط نقطه‌های دامنه انتخاب می‌شود تعیین‌کننده‌ی تعداد نقطه‌ها در دامنه‌ی پشتیبانی است.



شکل ۱. دامنه‌ی پشتیبانی برای نقطه‌ی مورد توجه، ۰: نقاط دامنه، x: نقطه‌ی مورد توجه.



از ترکیب معادله‌های (۵) و (۱۱) رابطه‌ی زیر بین تابع درونیابی شده و مقدارهای تابع در نقاط دامنه به دست می‌آید [۹]

$$\phi^h(x) = R^T(x)\lambda + P^T(x)b = [R^T(x)P^T(x)]a = [R^T(x)P^T(x)]G^{-1}\tilde{\phi}_s = \tilde{N}^T(x)\tilde{\phi}_s \quad (12)$$

که با استفاده از آن، تابع شکل مشابه روش اجزای محدود به صورت زیر قابل محاسبه است

$$\tilde{N}^T(x) = [R^T(x)P^T(x)]G^{-1} = [N_1(x)N_2(x)...N_n(x)...N_{n+m}(x)] \quad (13)$$

با توجه به معادله‌ی (۱۳) و این که $\tilde{\phi}_s = \begin{bmatrix} \phi_s \\ 0 \end{bmatrix}$ معادله‌ی (۱۲) را می‌توان چنین نوشت

$$\phi^h(x) = [N_1(x)N_2(x)...N_n(x)]\phi_s = N^T(x)\phi_s \quad (14)$$

بنابراین تابع‌های شکل متناظر با n نقطه‌ی دامنه‌ی پشتیبانی از معادله‌ی (۱۳) و با حذف عنصرهای اضافی به دست می‌آید.

۳.۲ شکل ضعیف معادله‌ی پخش نوترون

شکل ضعیف استاندارد معادله‌ی پخش دو بعدی نوترون با ضرب نمودن معادله‌ی پخش در یک تابع وزن $v(x,y)$ که شرایط مرزی را برآورده می‌کند و با انتگرال‌گیری روی دامنه به دست می‌آید

$$\int_{\Omega} v(x,y) \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial}{\partial x} \phi(x,y) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial}{\partial y} \phi(x,y) \right) + \sum_a \phi(x,y) - S(x,y) \right) dx dy = 0 \quad (15)$$

که در آن ϕ شار نوترون، D ضریب پخش نوترون، Σ_a سطح مقطع جذب ماکروسکوپی و S چشمه‌ی نوترون است. با انتگرال‌گیری جزء به جزء، از معادله‌ی (۱۵) چنین به دست می‌آید

$$\int_{\Omega} D \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + D \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + v \sum_a \phi dx dy = \int_{\Omega} v S(x,y) dx dy + \int_{\Gamma_x} v(x,y) D \frac{\partial \phi}{\partial x} + \int_{\Gamma_y} v(x,y) D \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (16)$$

که در آن Ω دامنه‌ی مسئله و Γ_x و Γ_y مرزهای دامنه هستند.

برای به دست آوردن تابع‌های شکل، باید ضریب‌های λ و b در معادله‌ی (۵) تعیین شوند. برای این منظور یک دامنه‌ی پشتیبانی شامل تعداد n نقطه‌ی دامنه حول نقطه‌ی مورد توجه در نظر گرفته می‌شود. بدین ترتیب با قرار دادن این نقطه‌ها در معادله‌ی (۵)، تعداد n معادله‌ی خطی به دست می‌آید [۱۱]

$$\phi_s = R_o \lambda + P_m b \quad (6)$$

که در آن ϕ_s مقدار تابع در هر یک از نقطه‌های دامنه‌ی پشتیبانی است.

در معادله‌ی (۶) تابع‌های شعاعی و چندجمله‌ای به صورت زیر هستند

$$R_o = \begin{bmatrix} R_1(r_1)R_2(r_1)...R_n(r_1) \\ R_1(r_2)R_2(r_2)...R_n(r_2) \\ \dots \\ R_1(r_n)R_2(r_n)...R_n(r_n) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (7)$$

$$P_m = \begin{bmatrix} 1 x_1 y_1 ... P_m(x_1) \\ 1 x_2 y_2 ... P_m(x_2) \\ \dots \\ 1 x_n y_n ... P_m(x_n) \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (8)$$

در معادله‌ی (۷)، برای مختصات دو بعدی داریم: $r_i = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ که در آن (x_i, y_i) نقطه‌ی مورد درونیابی و (x_j, y_j) یک نقطه در دامنه‌ی پشتیبانی است. در معادله‌ی (۵)، تعداد مجهول‌ها $n+m$ است $b_1, ..., b_m$ و $\lambda_1, ..., \lambda_n$. برای به دست آوردن m معادله‌ی دیگر از شرایط زیر استفاده می‌شود [۱۱]

$$\sum_{i=1}^n P_k(x_i) \lambda_i = P_m^T \lambda = 0; k = 1, ..., m \quad (9)$$

از ترکیب معادله‌های (۶) و (۹) معادله‌های زیر به دست می‌آیند

$$\tilde{\phi}_s = \begin{bmatrix} \phi_s \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_o & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda \\ b \end{bmatrix} = G a \quad (10)$$

$$a = \begin{bmatrix} \lambda \\ b \end{bmatrix} = G^{-1} \tilde{\phi}_s \quad (11)$$

۴.۲ پیاده‌سازی روش

برای پیاده‌سازی روش توصیف شده، از روش گالرکین برای گسسته‌سازی معادله‌ی پخش استفاده شد. برای این منظور $v(x, y)$ ، $\phi(x, y)$ و $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ و $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ در معادله‌ی (۱۶) با روابط زیر جای‌گزین شدند

$$v(x, y) = N_i(x, y); i = 1, \dots, n \quad (17)$$

$$\phi^h(x, y) = \sum_{j=1}^n N_j(x, y) \phi_j \quad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \phi^h(x, y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x} N_j(x, y) \phi_j = \sum_{j=1}^n B_j(x, y) \phi_j \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \phi^h(x, y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial y} N_j(x, y) \phi_j = \sum_{j=1}^n C_j(x, y) \phi_j \quad (20)$$

که در آن‌ها n تعداد نقطه‌ها در دامنه‌ی پشتیبانی، $N(x)$ تابع‌های شکل به دست آمده به روش درون‌یابی نقطه‌ای بر پایه‌ی تابع‌های شعاعی و ϕ_j مقدار شار نوترون در نقطه‌های دامنه است. انتگرال سمت چپ معادله‌ی (۱۶) با جای‌گذاری روابط (۱۷) تا (۲۰) به صورت زیر درمی‌آید

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (D \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + D \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} + v \Sigma_a \phi) dx dy \\ &= \int_{\Omega} (D \frac{\partial N_i}{\partial x} \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial x} \phi_j + D \frac{\partial N_i}{\partial y} \sum_{j=1}^n \frac{\partial N_j}{\partial y} \phi_j + N_i \Sigma_a \sum_{j=1}^n N_j \phi_j) dx dy; \\ & \quad i = 1, \dots, n \\ &= \int_{\Omega} (DB_i \sum_{j=1}^n B_j \phi_j + DC_i \sum_{j=1}^n C_j \phi_j + N_i \Sigma_a \sum_{j=1}^n N_j \phi_j) dx; \quad i = 1, \dots, n \\ &= \sum_{j=1}^n (\int_{\Omega} (B_i DB_j + C_i DC_j + N_i \Sigma_a N_j) dx dy) \phi_j; \quad i = 1, \dots, n \\ &= \sum_{j=1}^n K_{ij} \phi_j; \quad i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (21)$$

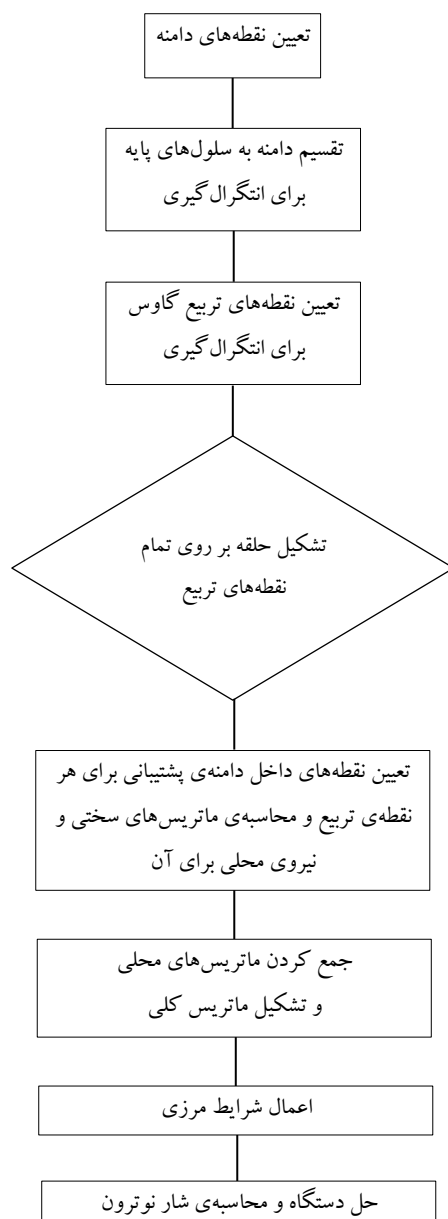
در معادله‌ی (۲۱)، $K_{ij} = \int_{\Omega} (B_i DB_j + C_i DC_j + N_i \Sigma_a N_j) dx dy$ ، هم‌چون روش اجزای محدود، ماتریس سختی نامیده می‌شود. به طور مشابه، انتگرال سمت راست معادله‌ی (۱۶) نیز به صورت زیر درمی‌آید

$$\int_{\Omega} v S(x, y) dx dy = \int_{\Omega} N_i(x, y) S(x, y) dx dy = f_i; \quad i = 1, \dots, n \quad (22)$$

که در آن f_i بردار نیرو نامیده می‌شود. دو جمله‌ی آخر معادله‌ی (۱۶) با استفاده از شرط‌های مرزی تعریف شده برای مسئله تعیین می‌شوند. با توجه به این که تابع‌های

شکل مورد استفاده براساس تابع‌های شعاعی نوع وندلند دارای ویژگی تابع دلتای کرونگر هستند، شرایط مرزی به طور مشابه با روش اجزای محدود قابل پیاده‌سازی هستند.

برای محاسبه‌ی انتگرال‌های معادله‌های (۲۱) و (۲۲)، دامنه‌ی مسئله به تعدادی سلول مربعی تقسیم و برای محاسبه‌ی انتگرال روی هر سلول از روش گوس-لژاندر دو بعدی استفاده شد. کل نقاط موجود در دامنه از ۱ تا N شماره‌گذاری شدند و مشابه روشی که در روش اجزای محدود به کار می‌رود، عملیات جمع کردن ماتریس‌های سختی محلی و بردارهای نیروی محلی در یک ماتریس سختی کلی و یک بردار نیروی کلی انجام شد. روند نمای نحوه‌ی انجام محاسبات در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲. روند نمای محاسبه‌ی انتگرال‌های معادله‌های (۲۱) و (۲۲).



۳. نتایج و بحث

به منظور ارزیابی روش به کار گرفته شده در حل معادله‌ی پخش، سه مسئله‌ی دو بعدی در نظر گرفته شد. در ابتدا برای این که دقت روش ارزیابی شود، یک مسئله‌ی دو بعدی با استفاده از شرط مرزی بازتابنده‌ی کامل در سطح‌های بالا و پایین به یک مسئله‌ی یک بعدی تبدیل شد. بدین ترتیب با در دست داشتن حل تحلیلی یک بعدی مسئله، نتایج عددی با پاسخ تحلیلی مقایسه شدند. هم‌چنین مسئله‌ی رید که یک آزمون استاندارد یک بعدی است، با استفاده از سطح‌های مرزی بازتابنده‌ی کامل حل شد. در ادامه برای ارزیابی روش در پرداختن به مسایل دو بعدی کاربردی، قلب یک رآکتور PWR شبیه‌سازی شد. در دو مسئله‌ی آخر برای ارزیابی نتایج، مسئله توسط کد محاسباتی سایتیشن شبیه‌سازی و پاسخ‌ها مقایسه شدند.

۱.۳ چشمه‌ی توزیع شده

در این مسئله یک مستطیل به ابعاد $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ شامل دو ناحیه مطابق شکل ۳ در نظر گرفته شد. ناحیه‌ی ۱ شامل چشمه به قدرت $S=1\text{ cm}^{-3}$ و ناحیه‌ی ۲ فاقد چشمه است. شرایط مرزی مسئله مطابق شکل در نظر گرفته شد. شرط پیوستگی شار در فصل مشترک دو ناحیه نیز لحاظ شد.

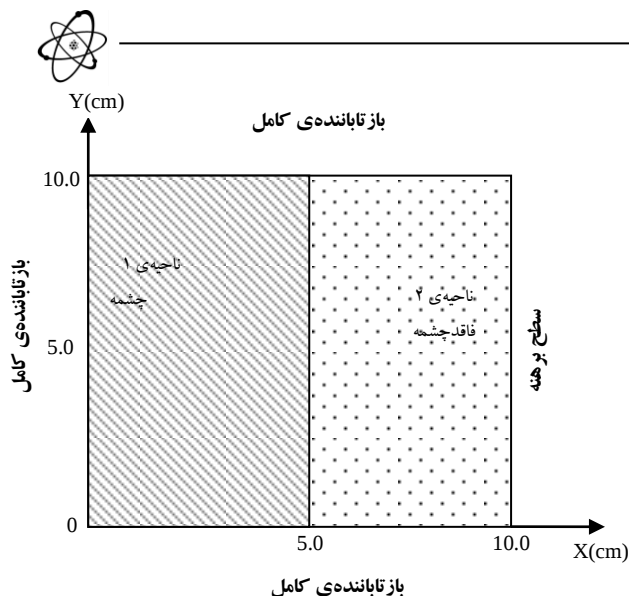
این مسئله برای دو نوع توزیع نقطه‌ها در دامنه که در شکل ۴ نشان داده شده‌اند حل شد. در شکل ۴ الف تعداد نقطه‌های توزیع شده در دامنه ۱۲۱ است و در شکل ۴ ب تعداد ۲۰ نقطه به طرفین فصل مشترک افزوده شد (مجموعاً ۱۴۱ نقطه).

برای حل این مسئله ثابت‌های معادله‌ی پخش به صورت زیر در نظر گرفته شد

$$\text{مورد ۱: ناحیه ۱: } \Sigma\alpha=0.5\text{ cm}^{-1}, D=0.2\text{ cm}, S=1$$

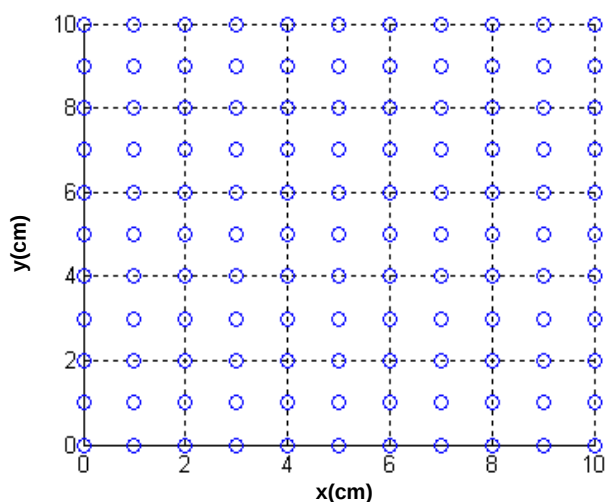
$$\text{ناحیه ۲: } \Sigma\alpha=0.9\text{ cm}^{-1}, D=0.3\text{ cm}, S=0$$

این مسئله با استفاده از تابع شعاعی وندلند C۲ حل شد. نتایج به دست آمده در شکل ۵ نشان داده شده‌اند. در شکل ۵ ب، بدون مش-۱ نتایج متناظر با توزیع نقطه‌ها مطابق شکل ۴ الف و بدون مش-۲ نتایج متناظر با توزیع نقاط مطابق شکل ۴ ب است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود با افزودن ۲۰ نقطه به طرفین فصل مشترک دو ناحیه، دقت نتایج حدود ۷٪ افزایش یافته است.

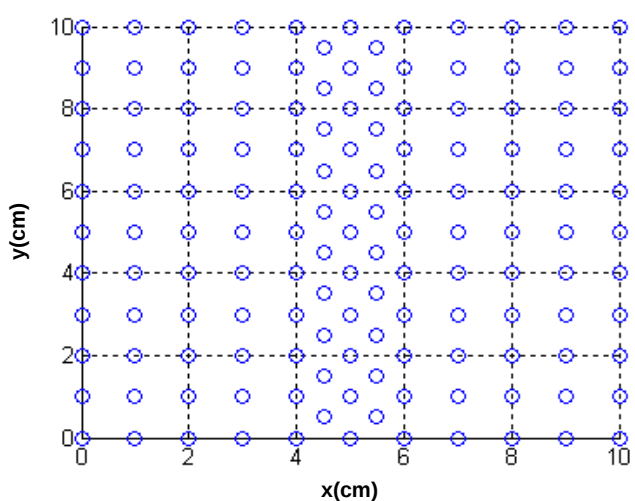


شکل ۳. هندسه‌ی مسئله‌ی چشمه‌ی توزیع شده.

(الف)



(ب)



شکل ۴. دو نوع توزیع نقطه‌ها در دامنه برای مسئله‌ی چشمه‌ی توزیع شده.



(الف)

- مورد ۱: ناحیه ۱: $\Sigma\alpha = 0.6 \text{ cm}^{-1}$, $D = 1.0 \text{ cm}$, $S = 1$
- ناحیه ۲: $\Sigma\alpha = 0.1 \text{ cm}^{-1}$, $D = 1.5 \text{ cm}$, $S = 0$
- مورد ۲: ناحیه ۱: $\Sigma\alpha = 0.3 \text{ cm}^{-1}$, $D = 0.5 \text{ cm}$, $S = 1$
- ناحیه ۲: $\Sigma\alpha = 0.2 \text{ cm}^{-1}$, $D = 1.0 \text{ cm}$, $S = 0$
- مورد ۳: ناحیه ۱: $\Sigma\alpha = 0.1 \text{ cm}^{-1}$, $D = 1.5 \text{ cm}$, $S = 1$
- ناحیه ۲: $\Sigma\alpha = 0.3 \text{ cm}^{-1}$, $D = 0.5 \text{ cm}$, $S = 0$

توزیع نقطه‌ها در دامنه نیز به صورت سه حالت زیر در نظر گرفته شد:

(الف) 21×21 نقطه،

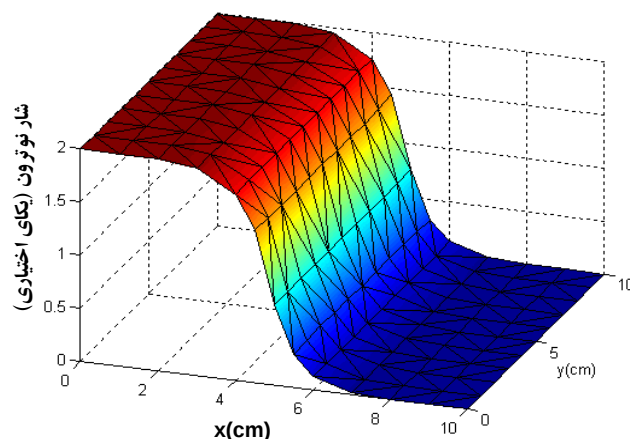
(ب) حالت الف + 40 نقطه در طرفین فصل مشترک (481 نقطه)

(ج) 41×41 نقطه

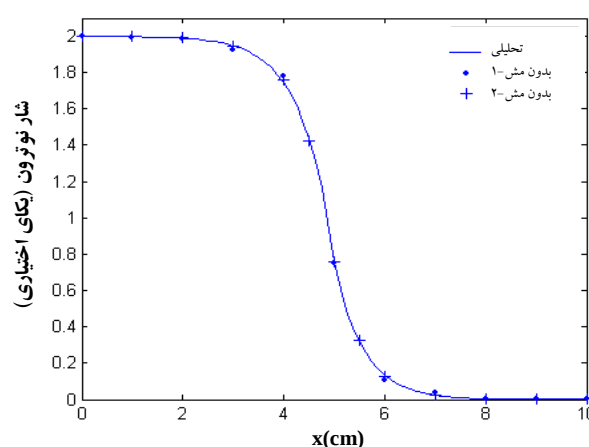
نتایج (خطای محاسبات) در جدول ۱ نشان داده شده‌اند. برای محاسبه‌ی خطا از رابطه‌ی زیر استفاده شد

$$\text{خطای نسبی کل} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\phi_i^{\text{method}} - \phi_i^{\text{analytic}}}{\phi_i^{\text{analytic}}} \right)^2} \quad (25)$$

همان‌گونه که ملاحظه می‌شود نتایج به دست آمده از دقت بالایی برخوردارند. با هندسه‌ی الف (441 نقطه در دامنه) بیش‌ترین خطا 0.0297 است که با افزودن 40 نقطه به دامنه (هندسه‌ی ب) به 0.0274 کاهش می‌یابد. در هندسه‌ی ج (1681 نقطه در دامنه) بیشینه‌ی خطا به 0.0113 کاهش می‌یابد. در صورت الحاق چندجمله‌ای درجه‌ی یک تابع وندلند- $C2$ و در صورت الحاق چندجمله‌ای درجه‌ی دو تابع وندلند- $C6$ به جواب دقیق‌تری منجر شده است. در مجموع مشاهده می‌شود که با الحاق چندجمله‌ای درجه دو خطا کوچک‌تر شده است.



(ب)



شکل ۵. شار نوترون؛ (الف) در کل دامنه، (ب) در طول مقطع $y=5 \text{ cm}$.

برای این مسئله که پاسخ تحلیلی آن موجود است، یک بررسی بر روی دقت نتایج حاصل از استفاده از سه نوع تابع شعاعی وندلند معرفی شده با معادله‌های ۲ تا ۴ و هم‌چنین با الحاق نمودن تابع‌های پایه چندجمله‌ای درجه یک و دو انجام شد. در این بررسی ثابت‌های معادله‌ی پخش مطابق سه حالت زیر در نظر گرفته شدند

جدول ۱. خطای استفاده از تابع‌های پایه مختلف وندلند در مسئله‌ی چشمه‌ی توزیع شده

مورد ۳			مورد ۲			مورد ۱			ثابت‌های بخش
ج	ب	الف	ج	ب	الف	ج	ب	الف	توزیع نقاط
0.0107	0.0274	0.0286	0.0082	0.0181	0.0196	0.0051	0.0103	0.0115	C2-Q1
0.0094	0.0257	0.0274	0.0064	0.0156	0.0165	0.0032	0.0081	0.0087	C2-Q2
0.0111	0.0274	0.0294	0.0089	0.0186	0.0213	0.0057	0.0106	0.0127	C4-Q1
0.0094	0.0248	0.0274	0.0064	0.0150	0.0165	0.0032	0.0077	0.0087	C4-Q2
0.0113	0.0273	0.0297	0.0093	0.0189	0.0221	0.0061	0.0108	0.0134	C6-Q1
0.0092	0.0243	0.0272	0.0061	0.0145	0.0162	0.0029	0.0072	0.0084	C6-Q2

عدد همراه C درجه‌ی همواری (معادله‌های ۲ تا ۴) و عدد همراه Q درجه‌ی (یک یا دو) تابع چندجمله‌ای الحاق شده را نشان می‌دهد.

**۲.۳ آزمون رید**

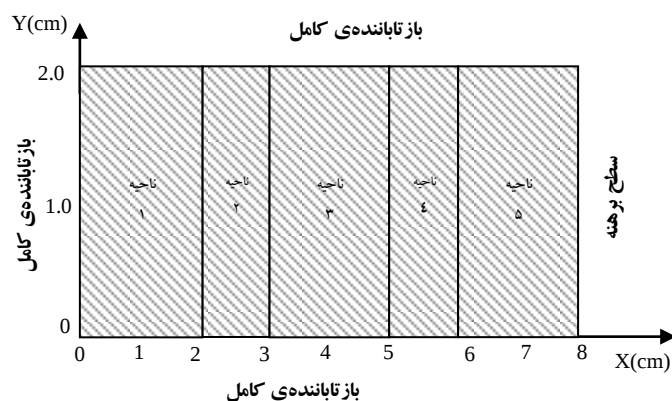
شکل ۷. الف نتایج حاصل از حل دو بعدی مسئله‌ی رید با استفاده از روش به کار گرفته شده را نشان می‌دهد. در شکل ۷. ب نیز نتایج در طول خط $y=1\text{cm}$ نشان داده شده‌اند. برای ارزیابی نتایج، این مسئله با استفاده از کد سایتیشن شبیه‌سازی و نتایج آن در شکل ۷. ب نشان داده شد. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود توافق خوبی بین نتایج به دست آمده و نتایج کد سایتیشن وجود دارد.

۳.۳ شبیه‌سازی قلب رآکتور PWR

به عنوان یک مسئله‌ی نمونه‌ی کاربردی قلب یک رآکتور آب تحت فشار (PWR) به روش بدون مش ارایه شده شبیه‌سازی شد. برای این منظور یک چهارم هندسه‌ی قلب رآکتور در نظر گرفته شد. این هندسه در شکل ۸ نشان داده شده است. خواص مواد مورد استفاده در قلب رآکتور در جدول ۳ درج شده است. نتایج به دست آمده از حل این مسئله در شکل ۹ نشان داده شده‌اند. شکل ۹. الف شار نوترون را در دو بعد نشان می‌دهد و مقطع این شار در امتداد قطر در شکل ۹. ب نشان داده شده است. برای مقایسه، نتایج حاصل از کد سایتیشن در امتداد قطر نیز در شکل ۹. ب با در نظر گرفتن ۲۵ و ۵۰ نقطه (به ترتیب، سایتیشن ۱ و سایتیشن ۲) در هر یک از جهات X و Y نشان داده شده است؛ این در حالی است که برای روش بدون مش که با MFM نشان داده شده، از ۲۵ نقطه در امتداد هر محور استفاده شده است. نتایج آن با در نظر گرفتن تعداد نقطه‌ی مساوی از دقت بالاتری نسبت به کد سایتیشن برخوردار است و تقریباً با نتایج این کد وقتی ۵۰ نقطه در امتداد هر محور در نظر گرفته شده است مطابقت دارد.

آزمون رید یک آزمون استاندارد یک گروهی برای هندسه‌ی تیغه است که برای ارزیابی کارایی کدهای هسته‌ای استفاده می‌شود. این آزمون معمولاً برای حل توسط نظریه‌ی ترابرد نوترون استفاده می‌شود، لکن حل معادله‌ی پخش این مسئله قابل مقایسه با حل ترابرد P۱ است. در این آزمون یک تیغه شامل پنج ناحیه با شرط مرزی بازتابنده‌ی کامل در سمت چپ و سطح برهنه در سمت راست در نظر گرفته شد. برای ارزیابی کد دو بعدی توسعه داده شده به روش بدون مش، شرط مرزی بازتابنده‌ی کامل در صفحه‌های بالایی و پایینی اعمال و بدین ترتیب مسئله دو بعدی به یک مسئله یک بعدی تبدیل شد. شکل ۶ هندسه‌ی آزمون رید را نشان می‌دهد و مشخصات ناحیه‌های مختلف این آزمون در جدول ۲ ذکر شده‌اند.

در حل معادله‌ی پخش، از ضریب پخش $D = \frac{1}{3\Sigma_t}$ که در آن پراکندگی از نوع همگن لحاظ شده است استفاده شد.



شکل ۶. هندسه‌ی مسئله آزمون رید.

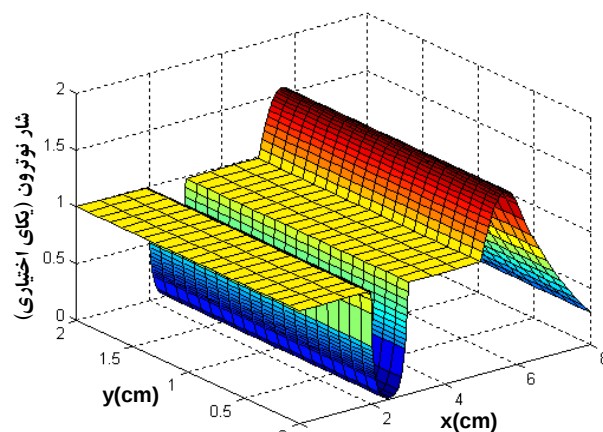
جدول ۲. مشخصات نواحی مختلف آزمون رید [۱۷]

شماره ناحیه	پهنای ناحیه (cm)	طول ناحیه (cm)	$\Sigma_a(\text{cm}^{-1})$	$\Sigma_s(\text{cm}^{-1})$	چشمه
۱	۰.۰-۲.۰	۰.۰-۲.۰	۵۰.۰	۰.۰	۵۰.۰
۲	۰.۰-۲.۰	۲.۰-۳.۰	۵.۰	۰.۰	۰.۰
۳	۰.۰-۲.۰	۳.۰-۵.۰	۱۵-۵	۰.۰	۰.۰
۴	۰.۰-۲.۰	۵.۰-۶.۰	۰.۱	۰.۹	۱.۰
۵	۰.۰-۲.۰	۶.۰-۸.۰	۰.۱	۰.۹	۰.۰

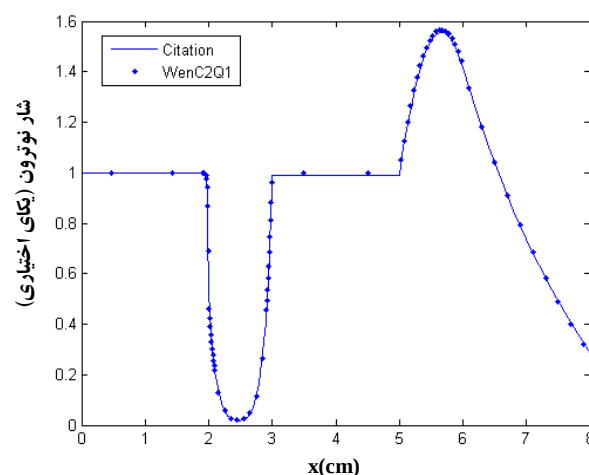
جدول ۳. خواص مواد مسئله‌ی قلب رآکتور هسته‌ای PWR

ماده‌ی ناحیه	چشمه	$\Sigma_a(\text{cm}^{-1})$	D(cm)
۱	۰.۰۱۰۴۸۰۸۳	۸.۳۱۳۴۴e-۰۳	۱.۴۱۷۵۴E+۰۰
۲	۰.۰۱۰۰۴۸	۸.۸۳۸۲۷E-۰۳	۱.۴۱۹۴۶E+۰۰
۳	۰.۰۱۰	۹.۵۷۹۱۸E-۰۳	۱.۴۲۲۳۵E+۰۰
۴	۰.۰۰۸۰۸۳	۸.۹۸۸۹۲E-۰۳	۱.۴۳۶۱۳E+۰۰
۵	۰.۰۰۶۰۸۳	۹.۰۹۴۲۴E-۰۳	۱.۴۳۳۰۴E+۰۰
۶	۰.۰۰۴۰۸۳	۹.۸۳۲۱۲E-۰۳	۱.۴۳۵۸۳E+۰۰
۷	۰.۰۰۳	۹.۲۶۱۳۳E-۰۴	۱.۷۴۱۴۸E+۰۰

(الف)

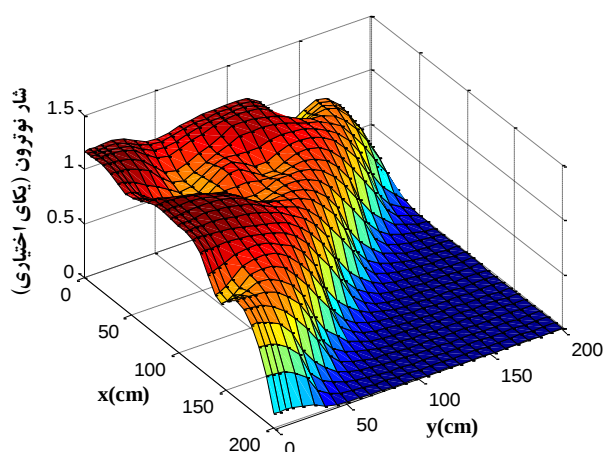


(b)

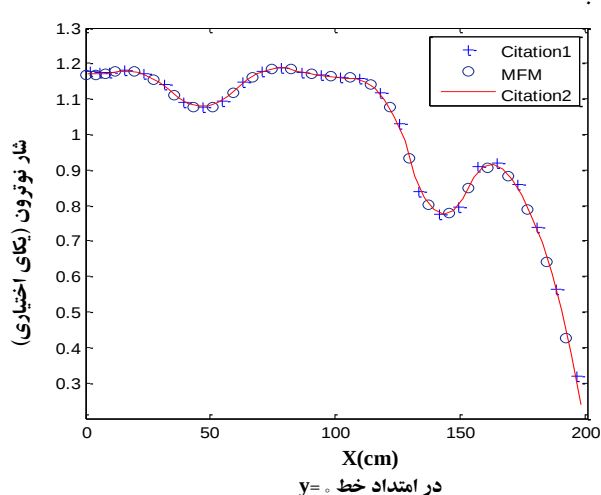


شکل ۷. شار نوترون برای حل آزمون رید به روش بدون مش؛ (الف) در دو بعد، (ب) در امتداد خط $y=1\text{ cm}$ و پاسخ کد سایتیشن.

(الف)



(b)



شکل ۹. نتایج به دست آمده از حل مسئله ی قلب رآکتور PWR؛ (الف) شار نوترون در دو بعد، (ب) مقطع شار نوترون در امتداد خط $y=0$.

۴. نتیجہ گیری

در این پژوهش از یک روش بدون مش مبتنی بر درونیابی نقطه‌ای با استفاده از تابع‌های شعاعی نوع وندلند برای حل معادله‌ی پخش نوترون در مختصات دو بعدی کارترین استفاده شد. برای ساختن تابع‌های شکل، تابع‌های پایه چندجمله‌ای درجه‌ی یک و دو به تابع‌های شعاعی الحاق شدند. از روش گالرکین برای گسسته‌سازی شکل ضعیف معادله‌ی پخش استفاده شد. برای محاسبه‌ی انتگرال‌های شکل ضعیف معادله‌ها از روش گوس-لژاندر استفاده شد. برای پیاده‌سازی روش، یک برنامه‌ی کامپیوتری در محیط Matlab توسعه داده شد. چند مسئله شامل چشمه‌ی توزیع شده، آزمون رید و مسئله‌ی قلب رآکتور PWR به وسیله‌ی این روش حل شد. مقایسه‌ی نتایج به دست آمده با

γ	γ								
γ	γ	γ							
ρ	ρ	γ	γ'						
1	2	3	γ	γ					
2	1	Δ	3	γ	γ				
1	4	1	Δ	3	γ	γ			
2	Δ	Δ	2	1	3	γ	γ		
1	1	Δ	1	1	2	3	γ	γ	
2	1	2	1	2	1	ρ	γ	γ	

° 11A 12A 13 14A 15A 16A 17A 18A 19A 20A 21A 22A 23A 24A 25A 26A 27A 28A 29A 30A 31A 32A 33A 34A 35A 36A 37A 38A 39A 40A 41A 42A 43A 44A 45A 46A 47A 48A 49A 50A 51A 52A 53A 54A 55A 56A 57A 58A 59A 60A 61A 62A 63A 64A 65A 66A 67A 68A 69A 70A 71A 72A 73A 74A 75A 76A 77A 78A 79A 80A 81A 82A 83A 84A 85A 86A 87A 88A 89A 90A 91A 92A 93A 94A 95A 96A 97A 98A 99A 100A 101A 102A 103A 104A 105A 106A 107A 108A 109A 110A 111A 112A 113A 114A 115A 116A 117A 118A 119A 120A 121A 122A 123A 124A 125A 126A 127A 128A 129A 130A 131A 132A 133A 134A 135A 136A 137A 138A 139A 140A 141A 142A 143A 144A 145A 146A 147A 148A 149A 150A 151A 152A 153A 154A 155A 156A 157A 158A 159A 160A 161A 162A 163A 164A 165A 166A 167A 168A 169A 170A 171A 172A 173A 174A 175A 176A 177A 178A 179A 180A 181A 182A 183A 184A 185A 186A 187A 188A 189A 190A 191A 192A 193A 194A 195A 196A 197A 198A 199A 200A 201A 202A 203A 204A 205A 206A 207A 208A 209A 210A 211A 212A 213A 214A 215A 216A 217A 218A 219A 220A 221A 222A 223A 224A 225A 226A 227A 228A 229A 230A 231A 232A 233A 234A 235A 236A 237A 238A 239A 240A 241A 242A 243A 244A 245A 246A 247A 248A 249A 250A 251A 252A 253A 254A 255A 256A 257A 258A 259A 260A 261A 262A 263A 264A 265A 266A 267A 268A 269A 270A 271A 272A 273A 274A 275A 276A 277A 278A 279A 280A 281A 282A 283A 284A 285A 286A 287A 288A 289A 290A 291A 292A 293A 294A 295A 296A 297A 298A 299A 300A 301A 302A 303A 304A 305A 306A 307A 308A 309A 310A 311A 312A 313A 314A 315A 316A 317A 318A 319A 320A 321A 322A 323A 324A 325A 326A 327A 328A 329A 330A 331A 332A 333A 334A 335A 336A 337A 338A 339A 340A 341A 342A 343A 344A 345A 346A 347A 348A 349A 350A 351A 352A 353A 354A 355A 356A 357A 358A 359A 360A 361A 362A 363A 364A 365A 366A 367A 368A 369A 370A 371A 372A 373A 374A 375A 376A 377A 378A 379A 380A 381A 382A 383A 384A 385A 386A 387A 388A 389A 390A 391A 392A 393A 394A 395A 396A 397A 398A 399A 400A 401A 402A 403A 404A 405A 406A 407A 408A 409A 410A 411A 412A 413A 414A 415A 416A 417A 418A 419A 420A 421A 422A 423A 424A 425A 426A 427A 428A 429A 430A 431A 432A 433A 434A 435A 436A 437A 438A 439A 440A 441A 442A 443A 444A 445A 446A 447A 448A 449A 450A 451A 452A 453A 454A 455A 456A 457A 458A 459A 460A 461A 462A 463A 464A 465A 466A 467A 468A 469A 470A 471A 472A 473A 474A 475A 476A 477A 478A 479A 480A 481A 482A 483A 484A 485A 486A 487A 488A 489A 490A 491A 492A 493A 494A 495A 496A 497A 498A 499A 500A 501A 502A 503A 504A 505A 506A 507A 508A 509A 510A 511A 512A 513A 514A 515A 516A 517A 518A

شکل ۸. هندسی یک چهارم قلب یک رآکتور PWR (اعداد نشان‌دهنده نوع ماده‌ی مجتمع سوخت است که در جدول ۳ داده شده‌اند).



مرجع‌ها:

1. R. Avila, A. Perez, Mesh free methods for partial differential equations IV-A pressure correction approach coupled with the MLPG method for solution of the Navier Stokes Equations, Springer (2008) 19-33.
2. H. Ding, C. Shu, K. S. Yeo, D. Xu, Development of least square-based two-dimensional finite-difference and their application to simulate natural convection in a cavity, Computers and Fluids, 33 (2004) 137-154.
3. G. R. Liu, M. B. Liu, Smoothed Particle Hydrodynamics, a mesh free practical method, World Scientific Publishing, Singapore (2003).
4. T. Belytschko, Y. Y. Lu, L. Gu, Element-free Galerkin methods, Int. Journal of Numerical Methods in Engineering, 37 (1994) 229-256.
5. W. Liu, S. Jun, Y. Zhang, Reproducing kernel particle methods, International Journal for Numerical Methods in Fluids, 20 (1995) 1081-1106.
6. C. Armando Duarte, J. Tinsley Oden, An h-p adaptive method using clouds, Computer methods in applied mechanics and engineering, 139 (1996) 237-262.
7. I. Babuska, B. Uday, E. O. John, Generalized Finite Element Methods: Main Ideas, Results, and Perspective, International Journal of Computational Methods, 1 (1) (2004) 67-103.
8. I. Babuska, J. M. Melenk, The Partition of Unity Method, Int. J. Num. Meth. Eng. 40 (1997) 727-758.
9. G. R. Liu, Y. T. Gu, A point interpolation method for two dimensional solids, Int. J. Numer. Methods Eng. 50 (2001) 937-951.
10. G. R. Liu, Y. T. Gu, An introduction to Mesh free methods and their programming, Springer (2005).
11. G. R. Liu, Mesh free methods, Moving Beyond the finite element, CRC Press (2003).
12. B. Rokrok, H. Minucmehr, A. Zolfaghari, Appliaction of Radial Point Interpolation Method to Neutron Diffusion field, Trends in applied sciences research, 7(1) (2012) 18-31.

پاسخ تحلیلی و نیز نتایج به دست آمده از کد سایتیشن نشان داد که روش به کار گرفته شده از دقت و کارایی بالایی برخوردار است. هم‌چنین نتایج به دست آمده نشان داد در صورتی که تابع‌های چندجمله‌ای درجه‌ی یک به تابع‌های شعاعی الحاق شوند، استفاده از تابع وندلند- C_2 منجر به دقت بالاتری می‌شود و در صورتی که تابع‌های چندجمله‌ای درجه دو به تابع‌های شعاعی الحاق شوند، با استفاده از تابع وندلند- C_6 دقت بالاتری حاصل می‌شود. در میان کلیه‌ی حالت‌های مختلف تابع‌های شعاعی و تابع‌های چندجمله‌ای الحاق شده به آن‌ها که در این پژوهش به کار گرفته شدند نیز تابع‌های وندلند- C_6 با الحاق شدن تابع‌های چندجمله‌ای پایه درجه دو نتایج دقیق‌تری را به دست دادند. روش ارایه شده را با افزودن محاسبات چند گروهی با استفاده از روش قدرت^(۱۱) و هم‌چنین با افزودن قابلیت محاسبات سه بعدی می‌توان به یک کد هسته‌ای جامع برای محاسبات پیچیده‌تر پخش نوترون تعمیم داد.

پی‌نوشت‌ها:

۱. Smoothed Particle Hydrodynamics
۲. Element Free Galerkin Method
۳. Reproducing Kernel Particle Method
۴. Hp-Clouds Method
۵. Generalized Finite Element Method
۶. Partition of Unity Method
۷. Point Interpolation Method
۸. Moving Least Squares
۹. Radial Basis Functions
۱۰. Singularity
۱۱. Power Method



13. T. B. Fowler, D. R. Vondy, G. W. Cunningham, Nuclear Reactor Core Analysis Code: CITATION, ORNL-TM-2496, Rev. 2, with Supplements 1, 2, and 3 (1971).
14. N. Dyn, D. Levin, S. Rippa, Numerical procedures for surface fitting of scattered data by radial functions, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 7 (1986) 639-659.
15. E. J. Kansa, Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics I: Solutions to parabolic, hyperbolic, and elliptic partial differential equations, Computers Math. Applic. 19 (8-9) (1990) 147-161.
16. H. Wendland, Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree, Advances in Computational Mathematics, 4 (1995) 389-396.
17. O. A. Abuzaid, Discontinuous Finite Elements Solution for Neutron Diffusion and Transport, Ph.D. Thesis, London University (1994).