



## حل تحلیلی معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون با در نظر گرفتن چشمه‌ی نوترون خارجی نوسانی

رسول خدابخش<sup>۱</sup>، سهراب بهنیا<sup>۲</sup>، مسعود صیدی<sup>\*۱</sup>

۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، صندوق پستی: ۵۷۱۵۳-۱۶۵، ارومیه - ایران

۲. گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، صندوق پستی: ۱۶۱۱۶-۴۱۴، ارومیه - ایران

**چکیده:** چشمه‌ی خارجی نوترون نقش مهمی در راه‌اندازی رآکتور دارد؛ بنابراین حل تحلیلی معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون در حضور چشمه‌ی خارجی، برای پیش‌بینی تغییر چگالی نوترون در طول راه‌اندازی رآکتور حایز اهمیت است. در کارهای پیشین، حل تحلیلی معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون در حضور چشمه‌ی خارجی ثابت انجام شده است، اما با توجه به نوسان‌های چشمه‌ی نوترون حول یک مقدار میانگین، می‌توان چشمه را متغیر با زمان در نظر گرفت. لذا در پژوهش حاضر یک حل تحلیلی برای معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون با یک گروه نوترون تأخیری و افزایش تدریجی واکنش‌پذیری برای چشمه‌ی خارجی، با نوسان‌های سینوسی در زمان راه‌اندازی رآکتور ارائه شد. تنها تقریب به کار رفته در این پژوهش، چشم‌پوشی از مشتق دوم چگالی نوترون است. نتایج پژوهش حاضر در حد دامنه‌های خیلی کوچک نوسان، با نتایج کارهای دیگران هم‌خوانی کامل دارد.

**کلیدواژه‌ها:** افزایش تدریجی واکنش‌پذیری، چشمه‌ی نوترون خارجی، سینتیک نقطه‌ای نوترون، نوترون‌های تأخیری

## Analytical Solution of Neutron Point Kinetic Equations Taking Into Account Oscillating External Neutron Source

R. Khodabakhsh<sup>1</sup>, S. Behnia<sup>2</sup>, M. Seidi<sup>\*1</sup>

1. Department of Physics, Science Faculty, Urmia University, P.O.Box: 165-57153, Urmia - Iran

2. Department of Physics, Urmia University of Technology, P.O.Box: 414-16116, Urmia - Iran

**Abstract:** Neutron external source plays an important role during the start-up of a nuclear reactor. Therefore, the analytical solutions of neutron point kinetics equations in the presence of external source are important in predicting the variation of the neutron population during the start-up of a nuclear reactor. For a constant external source, an analytical solution is worked out, as shown in the previously published articles. Due to fluctuations of the neutron source around a mean value, the source is actually time dependent. Thus, in this research, an alternative analytical solution with one group of delayed neutrons is proposed with the ramp reactivity insertion for the external source with sinusoidal fluctuation during the start-up of the nuclear reactor. The only approximation made in this study is to ignore the second time derivative of the neutron population. The present study is fully in agreement with other studies regarding the limit of very small amplitude fluctuations.

**Keywords:** Ramp Reactivity Insertions, External Neutron Source, Neutron Point Kinetics, Delayed Neutrons

\*email: masoudseidi@yahoo.com

تاریخ دریافت مقاله: ۹۲/۵/۲۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۳/۴/۲



## ۱. مقدمه

طور کلی چشمه‌ی خارجی نوترون طبیعتی کاتوره‌ای دارد و حول یک مقدار ثابت افت و خیز می‌کند. لذا شدت چشمه‌ی خارجی تابعی از زمان است [۱۱]. معمولاً به دلیل تغییرات جزئی در شدت چشمه در لحظات اولیه‌ی راه‌اندازی رآکتور هسته‌ای، چشمه‌ی خارجی را ثابت در نظر می‌گیرند [۶، ۷]. در این جا سیستم معادله‌های دیفرانسیلی، خطی و با ضریب‌های ثابت هستند، لذا می‌توان اصل برهم نهی را اعمال کرد [۱۱] و با توجه به این که مقدار متوسط چشمه‌ی خارجی، مقدار ثابتی است، بنابراین می‌توان افت و خیزها را به صورت یک تابع سینوسی حول یک مقدار ثابت در نظر گرفت که مقدار متوسط آن در هر دوره‌ی تناوب صفر است

$$q(t) = \alpha + q_0 \sin(\omega t), \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (1)$$

که در آن  $q_0$ ، دامنه‌ی نوسانات چشمه،  $\omega$ ،  $T$  و  $\alpha$ ، به ترتیب، سرعت زاویه‌ای، دوره‌ی تناوب نوسان‌های چشمه و مقدار ثابت چشمه هستند.

در مطالعه‌ی حاضر، از چشمه‌ی سینوسی متغیر با زمان استفاده شده است. در این جا یک حل تحلیلی بدون در نظر گرفتن تقریب پرش آبی برای محاسبه‌ی چگالی نوترون در جملاتی از توابع گامای ناقص ارایه شده است.

## ۲. حل تحلیلی معادله‌های حاکم بر رفتار نوترون در حالت زیربحرانی رآکتور

در طول راه‌اندازی، رآکتور در حالت زیربحرانی قرار دارد، لذا نمی‌توان از چشمه‌ی خارجی چشم‌پوشی کرد. در این حالت میانگین دمای قلب و توان رآکتور، کوچک بوده و در نتیجه می‌توان از اثرات پس‌خورد دمایی صرف‌نظر کرد [۲]. مدلی که برای توصیف پویای چنین سیستمی توسط پالما و همکاران [۵]، زانگ و همکاران [۱۰] و ساسیاشیلا [۶] ارایه شده است، از فرمول‌بندی ریاضی زیر تبعیت می‌کند

$$\begin{aligned} \frac{dn(t)}{dt} &= \frac{\rho(t) - \beta}{l} n(t) + \lambda c(t) + q(t) \\ \frac{dc(t)}{dt} &= \frac{\beta}{l} n(t) - \lambda c(t) \end{aligned} \quad (2)$$

معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون (NPK)، مجموعه‌ای از معادله‌های دیفرانسیلی خطی جفت شده برای چگالی نوترون و غلظت پیش‌رس‌های نوترون تأخیری در سیستم رآکتور هسته‌ای است، که رفتار جمعیت نوترون‌ها را در رآکتور توصیف می‌کند [۱]. یکی از مهم‌ترین پارامترهای رآکتور هسته‌ای که در معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون ظاهر می‌شود، واکنش‌پذیری<sup>(۱)</sup> است، که مستقیماً با کنترل رآکتور مرتبط است. واکنش‌پذیری عمدتاً وقتی اضافه می‌شود که میله‌های کنترل جابه‌جا شوند. در عمل هر پله‌ی جابه‌جایی میله‌های کنترل، معرف یک پله واکنش‌پذیری خطی در یک فاصله‌ی زمانی مشخص است [۲]. در طول راه‌اندازی رآکتور، باید برای جلوگیری از بروز هر گونه حادثه‌ای به مسأله‌ی کنترل رآکتور توجه ویژه‌ای داشت؛ به این منظور، برای جلوگیری از هر حادثه‌ای می‌توان با تنظیم آهنگ افزایش واکنش‌پذیری یعنی، تنظیم سرعت حرکت میله‌های کنترل در طول فرایند راه‌اندازی، از بروز آن جلوگیری کرد [۳]. در عمل، میله‌های کنترل در بازه‌های زمانی مشخص طوری جابه‌جا می‌شوند، که واکنش‌پذیری افزوده شده به قلب رآکتور به طور خطی تغییر کند [۴، ۵]. طی فرایند افزایش واکنش‌پذیری خطی، وقتی که یک رآکتور زیربحرانی در حضور چشمه‌ی خارجی نوترون به حالت بحرانی تأخیری آورده می‌شود، تحلیل معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون رآکتور زیربحرانی، با جمله‌ی چشمه برای تعیین رفتار گذار جمعیت نوترون به عنوان تابعی از آهنگ واکنش‌پذیری الحاقی، نسبت به واکنش‌پذیری زیربحرانی اولیه دارای اهمیت است [۶]. با توجه به این که جمله‌ی چشمه در حین راه‌اندازی رآکتور سهم قابل توجهی در سطح توان رآکتور دارد، بنابراین در نظر گرفتن این جمله در معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون مدل را واقعی‌تر می‌سازد [۷]. از این منظر روش‌های عددی بسیاری برای تحلیل سینتیک زیربحرانی مانند استفاده از کد عددی POKIN [۸]، روش ضمنی انتگرال‌گیری زمانی [۹] و غیره توسط پژوهش‌گران ارایه شده است. در روش‌های تحلیلی ارایه شده توسط زانگ و همکاران [۱۰] و ساسیاشیلا [۶] از تقریب پرش آبی و چشمه‌ی خارجی ثابت استفاده شده است، ولی روش تحلیلی پالما و همکاران [۵] مبتنی بر عدم استفاده از این تقریب، در حضور چشمه‌ی خارجی نوترون ثابت است. به



در معادله‌ی (۶) از بسط تابع‌های سینوس و کسینوس کمک گرفته شده [۱۳] و هم‌چنین به منظور ساده‌سازی معادله‌ها از تغییر متغیر  $u=t-k_1$  و  $\eta=k_1+\lambda k_2-1$  نیز استفاده شده است. در نهایت جواب انتگرال نامعین (۶) در جمله‌هایی از تابع گام‌ای ناقص چنین ارایه می‌شود

$$n_1(t) = \frac{e^{-\lambda u}}{u^{\eta+1}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\eta n+1} \alpha_{nm} \gamma(\eta + \eta n - m + \eta, -\lambda u) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\eta n} b_{nm} \gamma(\eta + \eta n - m + \eta, -\lambda u) + \alpha_{\eta} \gamma(\eta + \eta, -\lambda u) + A \right\} \quad (7)$$

که در آن، ضرایب‌های ثابت بسط چنین‌اند

$$\alpha_{nm} = \frac{lq_0}{r} (-1)^n \frac{k_1^m \omega^{\eta n+1}}{(\eta n + \eta)!} \binom{\eta n + \eta}{m}_{\eta n + \eta \geq m} \left( -\frac{1}{\lambda} \right)^{\eta + \eta n - m + \eta}$$

$$b_{nm} = -\frac{lq_0}{r} (-1)^n \frac{k_1^m \omega^{\eta n+1}}{(\eta n)!} \binom{\eta n}{m}_{\eta n + \eta \geq m} \left( -\frac{1}{\lambda} \right)^{\eta + \eta n - m + \eta}$$

$$\alpha_{\eta} = \left( \frac{\alpha l}{r} \right) \left( -\frac{1}{\lambda} \right)^{\eta} \quad (8)$$

با به کارگیری شرایط اولیه‌ی  $n_1(0) = n_0$  و  $\frac{dn(0)}{dt}$  می‌توان مقدار ثابت انتگرال‌گیری را محاسبه کرد

$$A = \frac{n_0 (-k_1)^{\eta+1}}{e^{\lambda k_1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\eta n+1} \alpha_{nm} \gamma(\eta + \eta n - m + \eta, \lambda k_1) - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\eta n} b_{nm} \gamma(\eta + \eta n - m + \eta, \lambda k_1) - \alpha_{\eta} \gamma(\eta + \eta, \lambda k_1) \quad (9)$$

در حالتی که از نوسان‌های چشمه صرف نظر کنیم (چشمه‌ی ثابت) به نتایج پالما و همکاران [۵] می‌رسیم

$$\lim_{q_0 \rightarrow \infty} n_1(t) = \lim_{q_0 \rightarrow \infty} \frac{e^{-\lambda u}}{u^{\eta+1}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\eta n+1} \alpha_{nm} \gamma(\eta + \eta n - m + \eta, -\lambda u) + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\eta n} b_{nm} \gamma(\eta + \eta n - m + \eta, -\lambda u) + \alpha_{\eta} \gamma(\eta + \eta, -\lambda u) + A \right\}$$

$$= \frac{e^{-\lambda u}}{u^{\eta+1}} \left[ \gamma(\eta + \eta, -\lambda u) + \lim_{q_0 \rightarrow \infty} A \right] \quad (10)$$

به علاوه، واکنش‌پذیری اضافی متغیر با زمان، در معادله‌های (۲) چنین است [۵، ۶، ۱۰]

$$\rho(t) = \begin{cases} \rho_0 + rt & 0 \leq t < t_0 \\ \rho_0 + rt_0 & t \geq t_0 \end{cases} \quad (3)$$

در معادله‌های (۲) و (۳)،  $n(t)$  چگالی نوترون،  $c(t)$  متوسط چگالی پیش‌رس‌های نوترون تأخیری،  $\rho$  واکنش‌پذیری،  $\lambda$  ثابت واپاشی متوسط پیش‌رس‌های نوترون تأخیری،  $I$  زمان متوسط نسل نوترون‌های آبی،  $\beta$  کسر کل نوترون‌های تأخیری،  $r$  ضریب خطی افزایش تدریجی واکنش‌پذیری،  $q(t)$  شدت چشمه‌ی خارجی نوترون،  $\rho_0$  واکنش‌پذیری زیربحرانی و  $t_0$  مدت زمان جابه‌جایی میله‌های کنترل است. با حذف وابستگی غلظت پیش‌رس‌های نوترون تأخیری [۱۰] و صرف نظر کردن از جمله‌ی  $I \frac{d^2 n(t)}{dt^2}$  در مقایسه با سایر جمله‌ها، و هم‌چنین با در نظر گرفتن  $\lambda I |\rho - \beta| \ll 1$ ، دستگاه معادله‌های دیفرانسیلی حاکم، که رفتار تقریبی چگالی نوترون را برای تغییر در واکنش‌پذیری با رابطه‌ی (۲) توصیف می‌کند، چنین خواهد بود

$$[\rho - \beta] \frac{dn(t)}{dt} + \left[ \lambda \rho + \frac{d\rho}{dt} \right] n(t) = -I \left[ \lambda q(t) + \frac{dq(t)}{dt} \right] \quad (4)$$

۱.۲ چگالی نوترون در زمان افزایش تدریجی واکنش‌پذیری ( $0 \leq t(t)$ )  
با جای‌گذاری واکنش‌پذیری الحاقی تدریجی ( $\rho_1(t) = \rho_0 + rt$ ) و رابطه‌ی (۱) در معادله‌ی (۴)، معادله‌ی زیر حاصل می‌شود

$$\frac{dn_1(t)}{dt} + \frac{k_1 + \lambda t}{t - k_1} n_1(t) = -\frac{lq_0}{r(t - k_1)} \left[ \frac{\lambda \alpha}{q_0} + \lambda \sin(\omega t) + \omega \cos(\omega t) \right] \quad (5)$$

که در آن،  $k_1 = \frac{\lambda \rho_0 + r}{r}$  و  $k_2 = \frac{\beta - \rho_0}{r}$  ضرایب‌های ثابت و  $n = n_1$  است. معادله‌ی دیفرانسیلی (۵) را می‌توان به کمک روش ضریب انتگرال‌گیری [۱۲] حل کرد

$$n_1(t) = \frac{e^{-\lambda u}}{u^{\eta+1}} \left\{ -\frac{lq_0}{r} \left[ \int e^{\lambda u} u^{\eta} \left( \lambda \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{\eta n+1} (u + k_1)^{\eta n+1}}{(\eta n + \eta)!} \right) du + \int e^{\lambda u} u^{\eta} \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\omega^{\eta n+1} (u + k_1)^{\eta n}}{(\eta n)!} \right) du + \int e^{\lambda u} u^{\eta} \frac{\lambda \alpha}{q_0} du \right] + A \right\} \quad (6)$$



در واقع رابطه‌ی (۱۵)، چگالی نوترون برای یک چشمه‌ی ثابت با یک واکنش‌پذیری الحاقی ثابت است. این همان نتیجه‌ی است که در پژوهش پالما و همکاران [۵] ارائه شده است؛ بنابراین می‌توان تابع‌های گامای ناقص را در جمله‌هایی به صورت یک سری نوشت [۱۴]

$$\gamma(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{\alpha+n}}{n!(n+\alpha)}$$

$$\Gamma(\alpha, x) + \gamma(\alpha, x) = \Gamma(\alpha) \quad (16)$$

مطالعه‌ها حاکی از این است که برای دست‌یابی به دقت مورد نیاز، سه جمله‌ی اول بسط (۱۶) کافی است. به کمک تقریب گامای ناقص پیشنهاد شده در مرجع‌های شماره [۵، ۱۵] سه جمله‌ی اول بسط معادله‌های (۱۶) چنین است

$$\Gamma(\alpha, x) \approx \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left[ \frac{1}{e} \left( \alpha + \frac{1-\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} \right) \right]^{-\alpha} + x^{\alpha} \left[ \frac{x}{\alpha+1} - \frac{x^2}{2(\alpha+2)} - \frac{1}{\alpha} \right], \quad (e=2.71828)$$

$$\gamma(\alpha, x) \approx x^{\alpha} \left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{x^2}{2(\alpha+2)} - \frac{x}{\alpha+1} \right] \quad (17)$$

با استفاده از تقریب معادله‌ی (۱۷) در معادله‌های (۱۲) و (۷)، می‌توان چگالی نوترون را برای هر دو روند واکنش‌پذیری محاسبه کرد.

### ۳. نتیجه‌ها و بحث

به منظور بررسی اعتبار حل تحلیلی معادله‌های حاکم، از حل عددی به کمک نرم‌افزار MATLAB با روش ODE45 استفاده شد، هم‌چنین به منظور بررسی درستی جواب‌ها، می‌توان ثابت کرد که وقتی  $q_0 \rightarrow 0$  چشمه‌ی متناوب سینوسی تبدیل به چشمه‌ی ثابت خواهد شد و چگالی نوترون در هر مرحله از افزایش واکنش‌پذیری، دقیقاً نتایج پژوهش پالما و همکاران [۵] را نشان می‌دهد. به طور کلی رابطه‌ی چگالی نوترون حاصل در دو مرحله‌ی الحاق واکنش‌پذیری این است

$$n(t) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda t}}{u^{\eta+1}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\eta n+1} \alpha_{nm} \gamma(\eta + \eta n - m + \eta, -\lambda u) \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\eta n} b_{nm} \gamma(\eta + \eta n - m + \eta, -\lambda u) + \alpha_{\eta} \gamma(\eta + \eta, -\lambda u) + A \right\}^{\rho_0 + \eta t} & 0 \leq t < t_0 \\ e^{-st} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \Gamma(\eta n + \eta, -st) + d_n \Gamma(\eta n + \eta, -st)) + \alpha_s e^{st} + B \right]^{\rho_0 + \eta t} & t \geq t_0 \end{cases} \quad (18)$$

۲.۲ چگالی نوترون در زمان افزایش تدریجی واکنش‌پذیری ( $t \geq t_0$ )  
به دنبال افزایش واکنش‌پذیری برای زمان‌های  $t \geq t_0$ ، واکنش‌پذیری ثابت نگه داشته می‌شود ( $\rho = \rho_0 + \eta t_0$ )، بنابراین معادله‌ی دیفرانسیلی حاکم بر رفتار چگالی نوترون در این وضعیت ( $n=n_2$ ) این است

$$\frac{dn_2(t)}{dt} + sn_2(t) = -\frac{1}{\rho_0 + \eta t_0 - \beta} \left[ \lambda q + \frac{dq}{dt} \right] \quad (11)$$

که در آن  $s = \frac{\lambda(\rho_0 + \eta t_0)}{\rho_0 + \eta t_0 - \beta}$  مقدار ثابتی است. در این مرحله، به کمک روش ضریب انتگرال‌گیری، چگالی نوترون در جمله‌هایی از تابع گامای ناقص چنین نوشته می‌شود

$$n_2(t) = e^{-st} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \Gamma(\eta n + \eta, -st) + d_n \Gamma(\eta n + \eta, -st)) + \alpha_s e^{st} + B \right] \quad (12)$$

که در آن، ضریب‌های ثابت بسط چنین‌اند

$$c_n = -\frac{l q_0 \lambda}{\rho_0 + \eta t_0 - \beta} \frac{(-1)^n \omega^{\eta n+1}}{(\eta n + \eta)! s^{\eta n+1}}$$

$$d_n = -\frac{l q_0 \lambda}{\rho_0 + \eta t_0 - \beta} \frac{(-1)^n \omega^{\eta n+1}}{(\eta n)! s^{\eta n+1}}$$

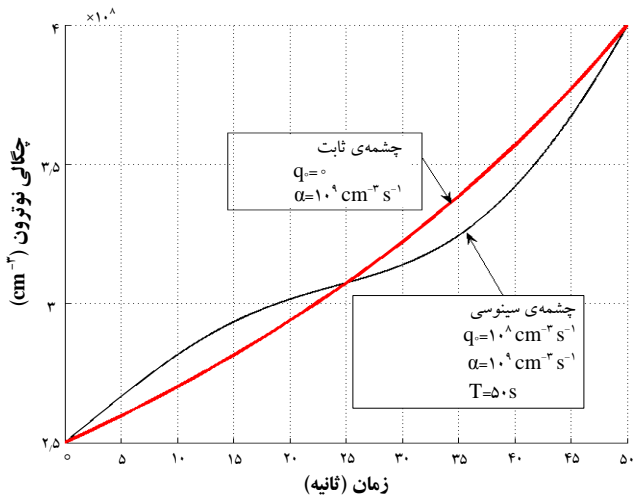
$$\alpha_s = -\frac{l \alpha}{\rho_0 + \eta t_0} \quad (13)$$

به کمک شرط پیوستگی  $n_1(t_0) = n_2(t_0)$ ، ثابت انتگرال‌گیری در معادله‌ی (۱۲) می‌تواند چنین محاسبه شود

$$B = \frac{e^{st_0 - \lambda(t_0 - k_2)}}{(t_0 - k_2)^{\eta+1}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\eta n+1} \alpha_{nm} \gamma(\eta + \eta n - m + \eta, -\lambda(t_0 - k_2)) \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\eta n} b_{nm} \gamma(\eta + \eta n - m + \eta, -\lambda(t_0 - k_2)) + \alpha_{\eta} \gamma(\eta + \eta, -\lambda(t_0 - k_2)) + A \right\} \\ - \sum_{n=0}^{\infty} (c_n \Gamma(\eta n + \eta, -st_0) + d_n \Gamma(\eta n + \eta, -st_0)) - \alpha_s e^{st_0} \quad (14)$$

وقتی  $q_0 \rightarrow 0$  داریم،

$$\lim_{q_0 \rightarrow 0} n_2(t) = \left[ \alpha_s + \lim_{q_0 \rightarrow 0} B e^{-st} \right] \quad (15)$$



شکل ۲. تغییر چگالی نوترون در مرحله‌ی اول افزایش تدریجی واکنش‌پذیری.

چگالی نوترون باید به ازای پارامترهای یکسان، حول یک مقدار ثابت (چگالی نوترون چشمه‌ی ثابت) به طور سینوسی نوسان کند، که البته این مطلب تا حدودی با شکل ۱ در تناقض است، به علاوه حد اشباع جمله‌ی ثابت با جمله‌ی سینوسی نیز متفاوت است. در هر محاسبه‌ی عددی و اندازه‌گیری تجربی، خطا وجود دارد، اما محدوده‌ی خطا چه قدر می‌تواند بر روی نتایج اصلی تأثیرگذار باشد؟ پاسخ این پرسش، به گونه‌ای که در ادامه نیز به این موضوع پرداخته می‌شود، به ماهیت مسأله‌ی مورد بررسی برمی‌گردد. با توجه به این که معادله‌های سینتیکی نقطه‌ای نوترون به شرایط اولیه و پله‌های زمانی محاسبه‌ی عددی بسیار حساس هستند، طبیعی است که پله‌های زمانی کوچک‌تر، نتایج دقیق‌تری به همراه دارند. پله‌های زمانی به کار رفته در شکل ۱، از مرتبه‌ی  $h=0.1$  s هستند، بنابراین اگر از پله‌های زمانی کوچک‌تر در حل عددی معادله‌های حاکم استفاده شود، تناقض برطرف می‌شود، هم چنین حد اشباع مربوط به چشمه‌ی ثابت و سینوسی یکسان خواهد شد. تغییرات خارج از محدوده‌ی چشمه‌ی ثابت یک واقعیت فیزیکی نیست، بلکه یک واقعیت ریاضی است که منشاء اصلی آن اندازه‌ی پله‌های زمانی محاسبه‌ها، تقریب پرش آنی و حساسیت به شرایط اولیه است. در شکل ۳ می‌توان مشاهده کرد که دامنه‌ی نوسان‌های چگالی نوترون با کاهش دامنه‌ی نوسان‌های چشمه کاهش می‌یابد، به گونه‌ای که در چشمه‌های سینوسی با دوره‌ی زمانی ثابت، می‌توان از تقریب چشمه‌ی ثابت [۵]، به جای چشمه‌ی سینوسی استفاده کرد. در دوره‌های زمانی کوچک با دامنه‌ی ثابت و پله‌های زمانی بزرگ، استفاده از این تقریب درست نیست چرا که شدت نوسان‌ها، باعث تغییرهای بزرگی در چگالی نوترون خواهد شد، این موضوع در شکل ۴

پارامترهای هسته‌ای استفاده شده در این پژوهش برای یک رآکتور آب تحت فشار (PWR) با سوخت اورانیم-۲۳۵ عبارت‌اند از [۵، ۱۰]

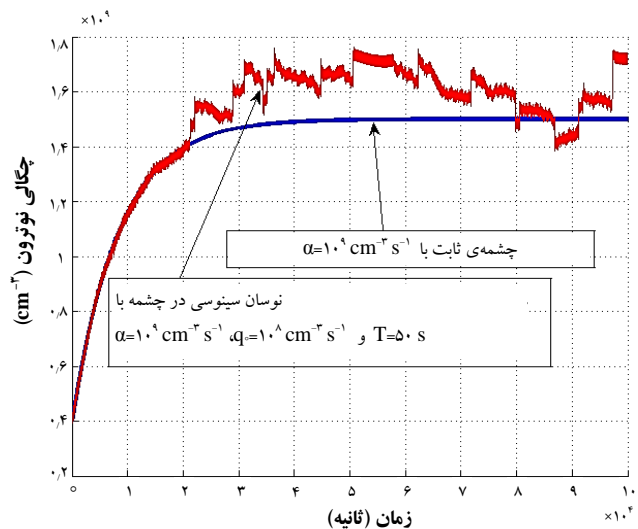
$$\alpha=10^{-9} \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, q_0=10^4 \text{ cm}^{-3} \text{ s}^{-1}, \beta=0.0075, \lambda=0.001 \text{ s}^{-1}$$

$$T=50 \text{ s} \text{ و } t=50 \text{ s}, \alpha=0.0001 \text{ s}^{-1}, \rho_0=-0.006, l=0.0015 \text{ s}$$

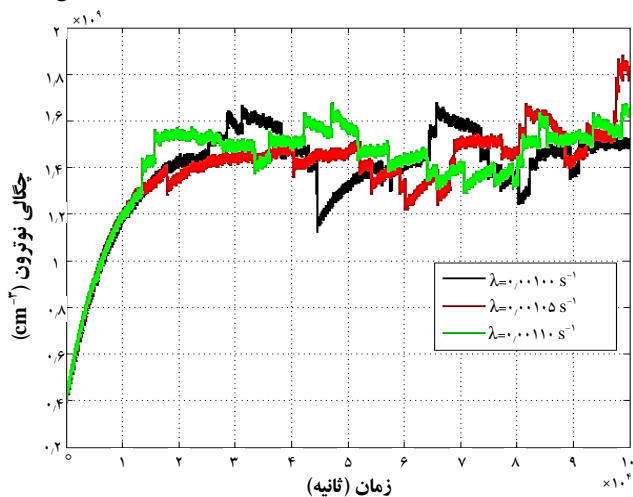
شکل ۱، تغییر زمانی چگالی نوترون برای چشمه‌ی سینوسی با واکنش‌پذیری را نشان می‌دهد

$$\rho(t) = \begin{cases} -0.006 + 0.0001t & 0 \leq t < 50 \text{ s} \\ -0.001 & t \geq 50 \text{ s} \end{cases} \quad (19)$$

حادثه‌های احتمالی در مرحله‌ی راه‌اندازی رآکتور بسیار شدیدتر از زمانی است که رآکتور در حالت عملکرد معمولی خود است، چرا که در این حالت به دلیل افزایش چگالی نوترون و در نتیجه، سطح توان رآکتور در یک بازه‌ی زمانی کوتاه عدم توجه به مسأله‌ی کنترل شار نوترون می‌تواند منجر به بروز حادثه‌های جدی شود [۱۱]. بنابراین کنترل رآکتور در ثانیه‌های اول مرحله‌ی راه‌اندازی رآکتور بسیار حایز اهمیت است. در مرحله‌ی راه‌اندازی، بیرون کشیدن میله‌های کنترل طی ۵۰ ثانیه‌ی اول به معنای الحاق یک واکنش‌پذیری خطی مثبت به سیستم است که به همراه چشمه‌ی خارجی به تغییرات سریع در سطح چگالی نوترون منجر می‌شود، شکل ۲ گویای این مطلب است. با توجه به شکل ۲ در مرحله‌ی دوم افزایش واکنش‌پذیری تغییر سطح توان به کندی انجام می‌شود؛ بنابراین کنترل شار نوترون آسان‌تر است.



شکل ۱. نوسان‌های سینوسی چگالی نوترون با چشمه‌ی سینوسی نسبت به چشمه‌ی ثابت (ODE۴۵).



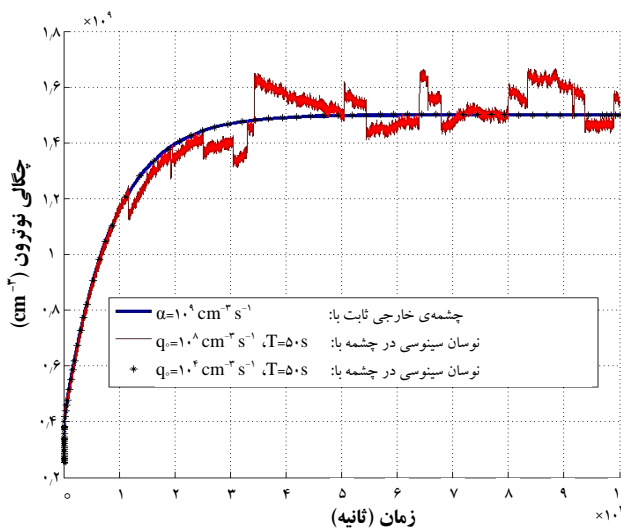
شکل ۵. تغییر زمانی چگالی نوترون برای مقادیر مختلف ثابت واپاشی متوسط در حضور چشمه‌ی سینوسی.

به منظور بررسی دقیق‌تر، نوسان‌ها در حضور چشمه‌ی سینوسی برای مقادیر مختلف ثابت واپاشی متوسط، در یک بازه‌ی زمانی کوچک‌تر طی دو مرحله الحاق واکنش‌پذیری در شکل ۶ نشان داده شده است.

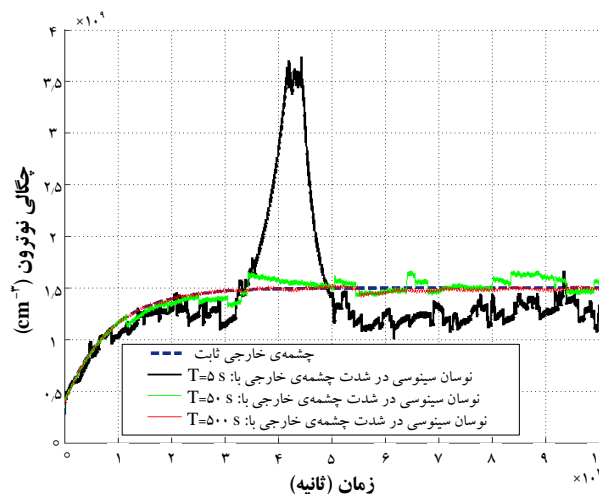
چگالی نوترون، به تغییرهای جزئی در ثابت واپاشی متوسط طی دو مرحله الحاق واکنش‌پذیری، در کوتاه مدت چندان حساس نیست، اما در دراز مدت این تغییرات ناچیز در ثابت واپاشی متوسط می‌تواند بر چگالی نوترون تأثیرگذار باشد؛ شکل‌های ۶ الف و ۶ ب حاکی از این مطلب‌اند. در حضور چشمه‌ی ثابت، چگالی نوترون در دراز مدت و کوتاه مدت به تغییر ثابت واپاشی متوسط چندان حساس نیست؛ این نتیجه در شکل ۷ نشان داده شده است. بنابراین ماهیت چشمه، چگالی نوترون را به تغییرهای پارامترهای پویای رآکتور حساس می‌سازد، به گونه‌ای که برای چشمه‌ی ثابت، تغییرهای جزئی در پارامترهای پویا، باعث تغییرهای قابل توجه بر روی چگالی نوترون، هم در کوتاه مدت و هم در دراز مدت نخواهد شد. شکل ۶ الف، با پله‌های زمانی  $h=0.0001$  s و در حضور چشمه با نوسان‌های سینوسی، با پارامترهای ارائه شده در این پژوهش رسم شده است.

دیگر موضوع قابل بحث در این‌جا، بررسی تأثیر جمله‌ی سینوسی بر حساسیت چگالی نوترون نسبت به ضریب خطی افزایش تدریجی واکنش‌پذیری است. این موضوع هم برای چشمه‌ی ثابت و هم برای چشمه با نوسان‌های سینوسی بررسی شده است. شکل ۸ حاکی از این است که تغییر چگالی نوترون، ناشی از تغییر ضریب خطی افزایش تدریجی واکنش‌پذیری، متأثر از نوسان‌های سینوسی در چشمه نیست.

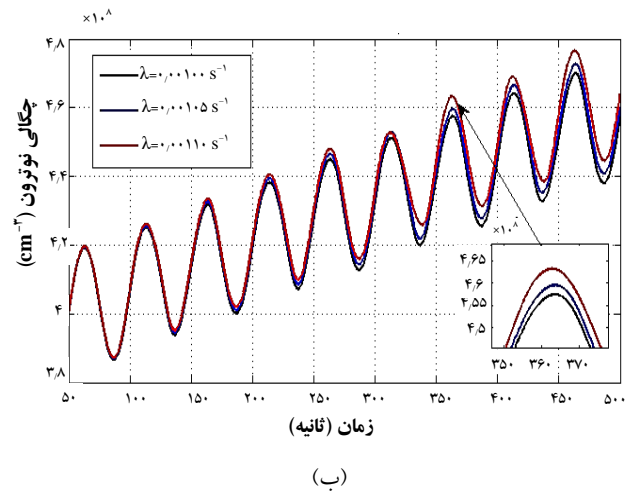
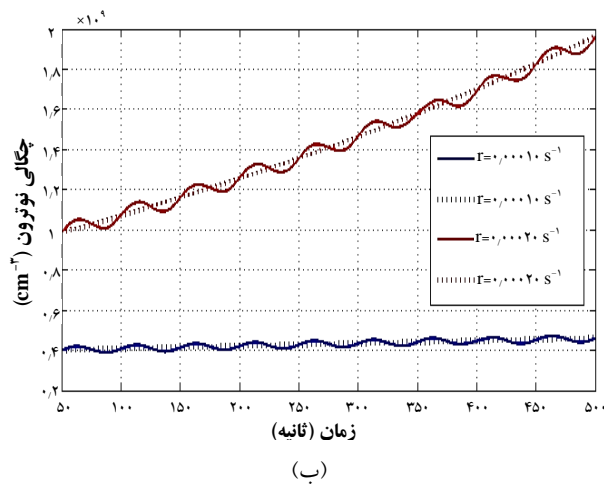
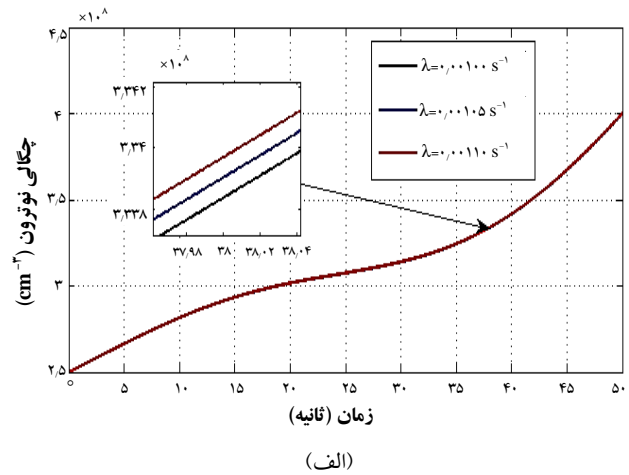
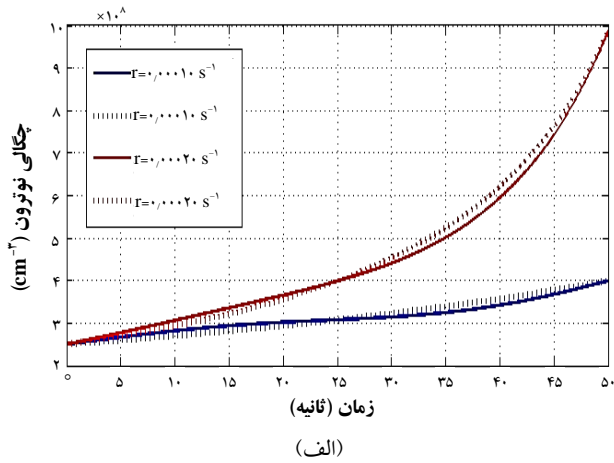
قابل دیدن است. به عبارت دیگر تأثیر اندازه‌ی پله‌های زمانی در نوسان‌های با دوره‌ی تناوب کوچک به مراتب بیش‌تر از نوسان‌های با دوره‌ی زمانی بزرگ است؛ بنابراین قله‌ی شکل ۴ یک واقعیت فیزیکی نیست، بلکه ناشی از پله‌ی زمانی استفاده شده در محاسبه است. همان‌طور که از شکل ۴ مشاهده می‌شود، با افزایش دوره‌ی تناوب چشمه، نوسان‌های حول مقدار ثابت، با شدت کم‌تری انجام می‌شود. علاوه بر دامنه‌ی نوسان‌های چشمه‌ی خارجی، واکنش‌پذیری الحاقی اولیه، ثابت واپاشی متوسط پیش‌رس‌های نوترون تأخیری و زمان متوسط نسل نوترون‌های آبی در میزان نوسان‌های چگالی نوترون مؤثر هستند. در شکل ۵ می‌توان حساسیت تغییر چگالی نوترون در اثر تغییرهای کوچک در ثابت واپاشی متوسط را مشاهده کرد.



شکل ۳. چگالی نوترون برای مقادیر مختلف دامنه‌ی چشمه‌ی سینوسی.



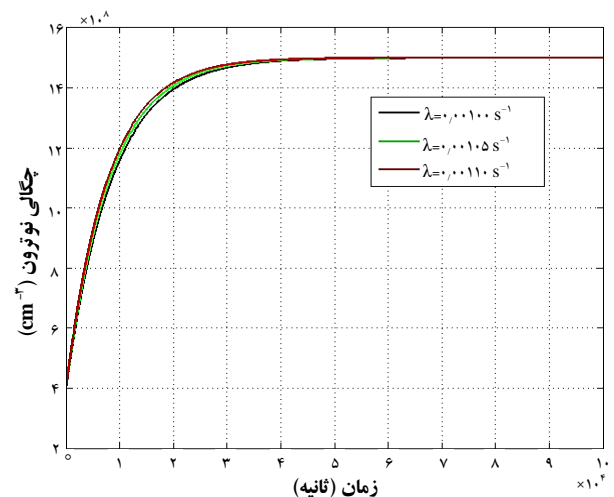
شکل ۴. تغییر چگالی نوترون چشمه‌ی سینوسی برای مقادیر مختلف دوره‌ی زمانی.



**شکل ۸.** تغییر کجالی نوترون در اثر تغییر در ضریب خطی افزایش تدریجی واکنش پذیری، الف) مرحله‌ی اول الحاق واکنش‌پذیری در دو روند با چشمه‌ی ثابت (منحنی‌های خط-چین) و سینوسی (منحنی‌های پیوسته)؛ ب) مرحله‌ی دوم الحاق واکنش‌پذیری در دو روند با چشمه‌ی ثابت (منحنی‌های خط-چین) و سینوسی (منحنی‌های پیوسته).

**شکل ۶.** تغییر کجالی نوترون برای مقدارهای مختلف ثابت واپاشی متوسط، در حضور چشمه‌ی سینوسی؛ الف) مرحله‌ی اول الحاق واکنش‌پذیری، ب) مرحله‌ی دوم الحاق واکنش‌پذیری.

دیگر مطلب قابل توجه، بررسی درصد نسبی تغییرهای کجالی نوترون ناشی از تغییرهای دامنه‌ی چشمه با نوسان‌های سینوسی در دو روند الحاق واکنش‌پذیری است. در تمام محاسبات انجام شده، نوسان‌ها حول مقدار ثابت  $(\text{cm}^{-3} \text{s}^{-1})$   $\alpha=10^9$  است. با توجه به جدول ۱ اگر دامنه‌ی چشمه‌ی سینوسی ۱۰ درصد شدت چشمه‌ی ثابت باشد، حداکثر درصد تغییرهای نسبی کجالی نوترون با چشمه‌ی سینوسی، نسبت به کجالی نوترون با چشمه‌ی ثابت در روند اول الحاق واکنش‌پذیری،  $\pm 4/4666$  است، که تأثیر چندانی در کجالی نوترون ندارد و می‌توان از نوسان‌های سینوسی صرف‌نظر کرد، در حالی که حداکثر درصد تغییرهای نسبی کجالی نوترون با چشمه‌ی سینوسی،



**شکل ۷.** تغییر کجالی نوترون برای مقدارهای مختلف ثابت واپاشی متوسط در حضور چشمه‌ی ثابت.



**جدول ۱.** حداکثر درصد تغییرهای چگالی نوترون با تقریب چشمه‌ی ثابت نسبت به تغییرهای چگالی نوترون ناشی از نوسان‌های چشمه‌ی سینوسی در مرحله‌ی اول و

دوم الحاق واکنش‌پذیری با دوره‌ی تناوب  $T=50$  s

شدت دامنه‌ی چشمه‌ی سینوسی $(q_0)$ ( $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ )	شدت دامنه‌ی چشمه‌ی ثابت $(\alpha)$ ( $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ )	$\frac{q_0}{\alpha} \times 100$	حداکثر درصد تغییرات نسبی چگالی نوترون با چشمه‌ی سینوسی نسبت به چگالی نوترون با چشمه‌ی ثابت ( $0 \leq t \leq 50$ s)	حداکثر درصد تغییرات نسبی چگالی نوترون با چشمه‌ی سینوسی نسبت به چگالی نوترون با چشمه‌ی ثابت ( $50 \leq t \leq 10^5$ s)
$10^8$	$10^9$	۱۰	$\pm 4.6666$	$\pm 149.2$
$10^7$	$10^9$	۱۰	$\pm 0.4666$	$\pm 59.2$
$10^6$	$10^9$	۰٫۱	$\pm 0.04672$	$\pm 12.00$
$10^5$	$10^9$	۰٫۰۱	$\pm 0.0065$	$\pm 4.6$
$10^4$	$10^9$	۰٫۰۰۱	$\pm 0.0032$	$\pm 0.66$
$10^3$	$10^9$	۰٫۰۰۰۱	$\pm 0.0003$	$\pm 0.2$

می‌توان بدون استفاده از تقریب مشتق دوم چگالی نوترون، معادله‌ها را به صورت تحلیلی حل و نتایج را با نتایج کار حاضر مقایسه کرد تا میزان تأثیر استفاده از تقریب مشتق دوم مشخص شود.

### پی‌نوشت

#### 1. Reactivity

نسبت به چگالی نوترون با چشمه‌ی ثابت در روند دوم الحاق واکنش‌پذیری، به درصد تغییر نسبی در شدت دامنه‌ی چشمه با نوسان‌های سینوسی بسیار حساس است، به گونه‌ای که اگر دامنه‌ی چشمه‌ی سینوسی  $10^6$  درصد شدت چشمه‌ی ثابت باشد، حداکثر درصد تغییرات نسبی چگالی نوترون برابر  $\pm 59.2$  درصد خواهد بود؛ بنابراین با توجه به طبیعت آماری چشمه، ثابت در نظر گرفتن چشمه با توجه به نوسان‌های چشمه، تقریب خوبی نیست، بنابراین با توجه به اهمیت و تأثیر این نوسان‌ها، در مدل‌های واقعی‌تر برای بهبود کنترل رآکتور باید نوسان‌های چشمه را در محاسباتها منظور کرد.

### ۴. نتیجه‌گیری

در این مطالعه ضمن بررسی اهمیت نوسان‌های سینوسی چشمه و تأثیر آن بر روی چگالی نوترون، در مقایسه با چشمه‌ی ثابت، یک حل تحلیلی برای پیش‌بینی چگالی نوترون در قلب رآکتور، به صورت تابعی از زمان در طول جابه‌جایی میله‌های کنترل، با واکنش‌پذیری الحاقی خطی و در نظر گرفتن چشمه‌ی خارجی متغیر با زمان ارائه شد. محاسبات انجام شده، بدون استفاده از تقریب پرش آنی انجام شده است. نتایج به دست آمده برای حالتی که دامنه‌ی شدت چشمه بسیار کوچک باشد ( $q_0 \rightarrow 0$ ) به نتایج پژوهش پالما و همکاران [۵] منجر می‌شود، و با افزایش شدت دامنه‌ی چشمه اختلاف فاحشی با نتایج پالما پیدا می‌کنند.

### ۵. پیشنهادها

برای دستیابی به نتایج واقعی‌تر می‌توان از مدل شش گروهی نوترون تأخیری به جای مدل تک گروهی استفاده کرد، به علاوه





1. S. Saha Ray, A. Patra, Numerical Solution of Fractional Stochastic Neutron Point Kinetic Equation for Nuclear Reactor Dynamics, *Annals of Nuclear Energy*, 54 (2013) 154-161.
2. M.A. Polo-Labarrios, G. Espinosa-Paredes, Application of the Fractional Neutron Point Kinetic Equation: Start-up of a Nuclear Reactor, *Annals of Nuclear Energy*, 46 (2012) 37-42.
3. M.A. Polo-Labarrios, G. Espinosa-Paredes, Numerical Analysis of Startup PWR with Fractional Neutron Point Kinetic Equation, *Progress in Nuclear Energy*, 60 (2012) 38-46.
4. S. Yamoah, E.H.K. Akaho, B.J.B. Nyarko, An Accurate Solution of Point Reactor Neutron Kinetics Equations of Multi-Group of Delayed Neutrons, *Annals of Nuclear Energy*, 54 (2013) 104-108.
5. D.A.P. Palma, S.A. Martinez, A.C. Gonçalves, Analytical Solution of Point Kinetics Equations for Linear Reactivity Variation During the Start-up of a Nuclear Reactor, *Annals of Nuclear Energy*, 36 (2009) 1469-1471.
6. T. Sathiyasheela, Sub-Critical Reactor Kinetics Analysis using Incomplete Gamma Functions and Binomial Expansions, *Annals of Nuclear Energy*, 37 (2010) 1248-1253.
7. T. Sathiyasheela, Inhomogeneous Point Kinetics Equations and the Source Contribution, *Nuclear Engineering and Design*, 240 (2010) 4083-4090.
8. B. Sharada, O.P. Singh, Validation of the Computer Code POKIN Against SEFOR Super Prompt Critical Transient and Exact Analytical Results, IGCAR Internal Report RPD/SNAS-32 (1990).
9. K. Hashimoto, H. Ikeda, T. Takeda, Numerical Instability of Time-Discretized One-Point Kinetic Equations, *Annals of Nuclear Energy*, 27 (2000) 791.
10. F. Zhang, W.Z. Chen, X.W. Gui, Analytic Method Study of Point-Reactor Kinetic Equation when Cold Start-up, *Annals of Nuclear Energy*, 35 (2008) 746-749.
11. D.L. Hetrick, Dynamics of Nuclear Reactor, American Nuclear Society, Jbc, Illinois, USA (1993).
12. W.E. Boyce, R.C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Wiley & Sons, Inc (2009).
13. G.B. Arfken, H.J. Weber, Mathematical Methods for Physicists, Harcourt/Academic Press (2001).
14. I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series and Products, Academic Press, California (2007).
15. G. Nemes, New Asymptotic Expansion for the  $C(z)$  Function, Vol. II. Stan's Library (2007).