J. of Nuclear Sci. and Tech.
No. 50, pp. 74-79, 2010

مجله علوم و فنون هسته‌ای
شماره ۵۰، صفحات ۷۹-۷۴، ۱۳۸۸

**Sci. and Tech. note**
**یادداشت علمی و فنی**

# استفاده از ابرهای کوواریانس برای یافتن ویژه بردارهای بیضوی ناهمسانگردی عیار اورانیم همراه با ارایه‌ی یک نمونه‌ی کاربردی

**داود جمالی‌اسفهلان*[۱]، حسن مدنی[۲]، محمدتقی طهماسب نظامی[۱]، فرزاد مهدوی[۱]، محمدرضا قادری[۱]، مسعود نجفی[۱]**
**۱- معاونت اکتشاف شرکت امکا، سازمان انرژی اتمی ایران، صندوق پستی: ۱۳۳۹-۱۴۱۵۵، تهران- ایران**
**۲- دانشکده مهندسی معدن و متالورژی، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، صندوق پستی: ۱۵۹۱۶۳۴۳۱۱، تهران- ایران**

**چکیده:** در روش‌های زمین‌آماری ارزیابی ذخایر و منابع مواد معدنی، انتخاب فضای اطراف نقاط تخمین با توجه به شکل کانسار و ساختارهای زمین‌شناسی اهمیت فراوانی دارد. از آن‌جا که اغلب فضای اطراف این نقاط از نوعی ناهمسانگردی برخوردارند، فضای نقاط مورد استفاده برای تخمین، به صورت بیضوی‌هایی، تحت عنوان بیضوی‌های ناهمسانگردی تعریف می‌شوند. با توجه به سه‌بعدی بودن اطلاعات مورد استفاده، تعیین این فضاها با روش بررسی منحنی‌های تغییرنما در جهات و روندهای سه‌بعدی برای این که در نهایت بتوان بیضوی ناهمسانگردی اطراف این نقاط را تعیین کرد، کار پیچیده‌ای است. برای رفع این مشکل، با استفاده از روش رسم ابرهای کوواریانس براساس همبستگی فضایی زوج نمونه‌ها در فواصل مختلف در فضا، ماتریس کوواریانس برای بررسی نحوه‌ی همبستگی داده‌ها در ابعاد سه‌بعدی ساخته می‌شود. به کمک این ماتریس، ویژه بردارها تعریف می‌شوند تا روندهای غالب پیوستگی در داخل کانسار به دست آید. با رسم منحنی تغییرنما در این جهت‌ها و تعیین مشخصات آن‌ها، فواصل مورد نیاز در جهات مختلف بیضوی ناهمسانگردی به دست می‌آید. در این مقاله پس از تشریح روش، یک مثال کاربردی در مورد بلوک یک آنومالی شماره ۶ خشومی آورده شده است.

***واژه‌های کلیدی: منحنی تغییر نما، بیضوی ناهمسانگردی، ابرهای کوواریانس، ویژه بردارها***

# Application of Covariance Clouds for Estimating the Anisotropy Ellipsoid Eigenvectors, with Case Study in Uranium Deposit

**D. Jamali Esfahlan*[1], H. Madani[2], M.T. Tahmaseb Nezami[1], F. Mahdavi[1], M.R. Ghaderi[1], M. Najafi[1]**
**1- Deputy of Exploration, Exploration and Preparation of Raw Materials for the Nuclear Industry Company of Iran, AEOI, P.O. Box: 14155-1339, Tehran-Iran**
**2- Department of Mining and Metallurgical Engineering, Amirkabir University of Technology, P.O.Box: 1591634311, Tehran - Iran**

**Abstract:** Various methods of Kriging and nonlinear geostatistical methods considered as acceptable methods for resource and reserve estimations have characters such as the least estimation variance in their nature, and accurate results in the acceptable confidence levels range could be achieved if the required parameters for the estimation are determined accurately. If the determined parameters don't have the sufficient accuracy, 3-D geostatistical estimations will not be reliable any more, and by this, all the quantitative parameters of the mineral deposit (e.g. grade-tonnage variations) will be misinterpreted. One of the most significant parameters for 3-D geostatistical estimation is the anisotropy ellipsoid. The anisotropy ellipsoid is important for geostatistical estimations because it determines the samples in different directions required for accomplishing the estimation. The aim of this paper is to illustrate a more simple and time preserving analytical method that can apply geophysical or geochemical analysis data from the core-length of boreholes for modeling the anisotropy ellipsoid. By this method which is based on the distribution of covariance clouds in a 3-D sampling space of a deposit, quantities, ratios, azimuth and plunge of the major-axis, semi-major axis and the minor-axis determine the ore-grade continuity within the deposit and finally the anisotropy ellipsoid of the deposit will be constructed. A case study of an uranium deposit is also analytically discussed for illustrating the application of this method.

***Keywords:*** ***Variogram, Anisotropy Ellipse, Covariance Clouds, Eigenvectors***

*email: djamali@aeoi.org.ir

تاریخ دریافت مقاله: ۸۶/۱۱/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۸۸/۷/۱۱

## ۱- مقدمه

برای تخمین‌های سه‌بعدی بهینه در کانسارهای معدنی، پارامترهای زیادی حایز اهمیت هستند. در صورت محاسبه‌ی نادرست یا حتی تقریبی آن‌ها، ممکن است جواب‌های نادرستی از ارزیابی ذخیره به دست آید. ضمناً سطح اطمینان‌های معمول را بدون انجام محاسبه‌ی درست این پارامترها، نمی‌توان رعایت کرد. یکی از مهم‌ترین این پارامترها، تعیین و مدل‌سازی بیضوی ناهمسان‌گردی[۱] مرتبط با متغیر مورد ارزیابی (مانند عیار اورانیم یا کمیت پرتوزایی) است [۱]. این پارامتر یکی از مهم‌ترین معیارها و پیش نیازهای اولیه در تخمین‌های سه‌بعدی در روش‌های زمین‌آماری و روش عکس مجذور فاصله است. در این تحقیق به تشریح یک روش ریاضی که بتواند این بیضوی را با سرعت قابل‌قبولی مدل‌سازی کند، همراه با ارایه‌ی یک نمونه‌ی کاربردی پرداخته شده است.

## ۲- اهمیت مدل‌سازی درست بیضوی ناهمسان‌گردی

با توجه به وجود ساختارها و روندهای جهت‌دار و نحوه‌ی شکل‌گیری کانسارها، رگه‌های معدنی و رخساره‌های زمین‌شناسی، پیوستگی متغیر مورد مطالعه (مانند عیار یا پرتوزایی) در داخل کانسار، در جهات مختلف غالباً متفاوت است. نحوه‌ی این پیوستگی در جهات مختلف با بررسی و ترسیم منحنی یا رویه‌های تغییرنما[۲]، در جهات و شیب‌های مختلف، مشخص خواهد شد.

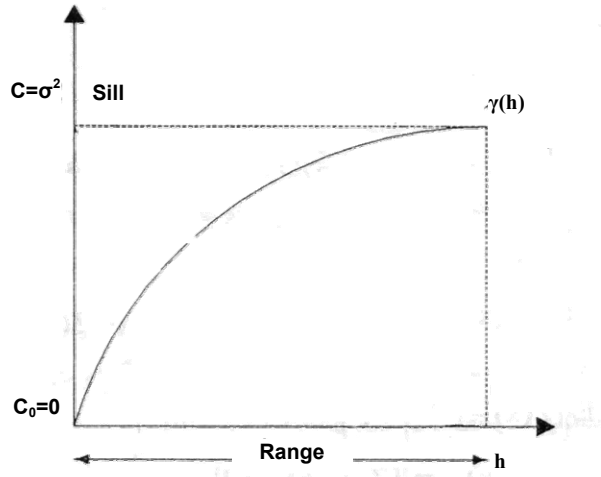
تابع تغییرنما در یک فاصله‌ی مشخص، چنین تعریف می‌شود

$$\gamma(h)=\frac{1}{2N(h)}\sum_{i=1}^{N(h)}\left[Z(x+h)-Z(x)\right]^2 \qquad (۱)$$

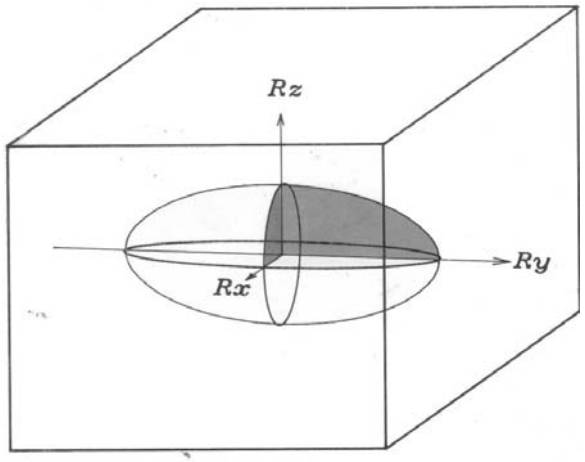
که در آن $\gamma(h)$ تابع تغییرنما برای زوج نمونه‌هایی است که در فاصله یا گام $h$ از هم قرار می‌گیرند، $N(h)$ تعداد زوج نمونه‌های به کار رفته در محاسبه در هر فاصله‌ی $h$ است و تابع $Z$، عیار اندازه‌گیری شده در مختصات تعریف شده می‌باشد.

منحنی تغییرنما در واقع نمودار تغییرات تابع تغییرنما برحسب پارامتر فاصله‌ی زوج نمونه‌ها (گام) در جهت و شیب مشخص است (شکل ۱).

در داخل فضای تخمین یک کانسار غالباً جهتی وجود دارد که در آن، متغیر مورد بررسی مطابق منحنی تغییرنما بیش‌ترین شعاع تأثیر را دارد. محور اصلی بیضوی ناهمسانگردی با این جهت تعریف می‌شود. در تخمین‌های سه‌بعدی، بیش‌ترین داده‌های مربوط به متغیر موردنظر، در جهت این محور انتخاب می‌شود. هم‌چنین جهتی وجود دارد که در آن شعاع تأثیر کمینه است. این جهت، محور کمینه برای بیضوی ناهمسانگردی را تعریف می‌کند. در این جهت از کم‌ترین داده برای تخمین استفاده می‌شود. محور شبه اصلی عمود بر دو محور مذکور، محور سوم بیضوی ناهمسانگردی را تعریف می‌کند. در یک بیضوی ناهمسانگردی، این سه محور در واقع عمود برهم تلقی می‌شوند (شکل ۲) [۲].




**شکل ۱**- یک نمونه منحنی تغییرنما در حالت آرمانی.




**شکل ۲**- نمونه‌ی طرح‌وار یک بیضوی ناهمسانگردی در فضا؛ محورهای سه‌گانه‌ی بیضوی عمود برهم هستند.

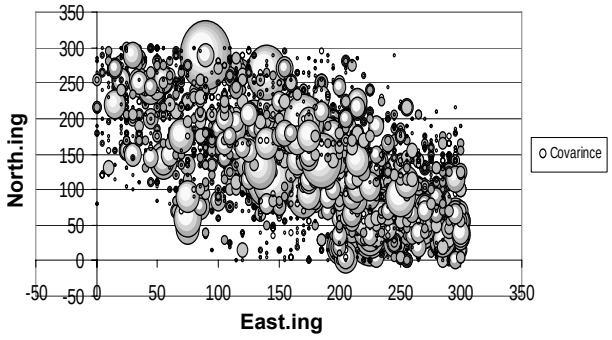
## ۳- تشکیل ابرهای کوواریانس برای مدل‌سازی بیضوی ناهمسانگردی

کوواریانس مجموعه‌ی زوج نمونه‌ها، برخلاف واریانس، میزان شباهت آن‌ها را نشان می‌دهد. مطابق تعریف، رابطه بین کوواریانس و واریانس این است

$$C(h) = \sigma^2 - \gamma(h) \qquad (۲)$$

که در آن C(h) کوواریانس، γ(h) تابع تغییرنما، و $\sigma^2$ مقدار واریانس داده‌ها است [۲].

در این‌جا منظور از بررسی کوواریانس، تعیین و محاسبه‌ی آن برای نقاط موجود در فضای تخمین یک متغیر است. مراحل به دست آوردن بیضوی ناهمسانگردی با روش‌های متعارف بسیار وقت‌گیر است، یک روش سریع برای تعیین حدود جهت‌های بیضوی ناهمسانگردی، ترسیم ابرهای کوواریانس در یک فضای سه‌بعدی است. این روش برای اولین بار توسط کریگ[۳] در سال ۱۹۹۹ مطرح شد. در این روش، هر دو نقطه که در فاصله‌ی h از یک‌دیگر در جهات مختلف قرار داشته باشند، با برداری به هم وصل می‌شوند که ابتدای آن در مرکز مختصات و انتهای آن، با توجه به فاصله‌ی زوج نمونه‌ی مورد بررسی و جهت آن‌ها نسبت به هم، در فضای سه‌بعدی قرار می‌گیرد. در نهایت مجموعه‌ای از نقاط، در اطراف مبدأ مختصات تشکیل می‌شود. حال اگر به مرکز هر یک از این نقاط، کره‌ای به شعاع متناسب با کوواریانس زوج نمونه‌ها رسم شود، در نهایت فضایی از کره‌ها تشکیل می‌شود که بدان ابرکوواریانس[۴] می‌گویند (شکل ۳).




**شکل ۳**- تشکیل ابرهای کوواریانس بر اساس کوواریانس داده‌ها در فضا.

ابرهای کوواریانس تشکیل شده را می‌توان با یک بیضوی به گونه‌ای برازش کرد که بیش‌ترین کشیدگی با محور بزرگ آن هم‌امتداد باشد. جهت‌هایی را که در آن‌ها بیضوی دارای کشیدگی است، جهت‌های ناهمسانگردی می‌نامند [۳].

تعیین دقیق پارامترهای مورد نیاز برای بیضوی ناهمسانگردی از روی شکل و کشیدگی ابرکوواریانس مشکل به نظر می‌رسد، ولی با استفاده از روش مؤلفه‌های اصلی می‌توان این پارامترها را محاسبه کرد. به این صورت که بایستی ویژه مقدارها و ویژه‌بردارهای ماتریس تشکیل شده از کوواریانس در جهت محورهای x، y و z را به دست آورد. ماتریس موردنظر یک ماتریس ۳×۳ است.

$$\begin{bmatrix} \sum C_i x_i^2 & \sum C_i x_i y_i & \sum C_i x_i z_i \\ \sum C_i x_i y_i & \sum C_i y_i^2 & \sum C_i y_i z_i \\ \sum C_i z_i x_i & \sum C_i z_i y_i & \sum C_i z_i^2 \end{bmatrix} \qquad (۳)$$

که در آن x، y و z، به ترتیب، مؤلفه‌های x، y و z بردار فضایی و C مقدار کوواریانس به ازای فاصله‌ی h است [۳].

پس از تشکیل و محاسبه‌ی ماتریس کوواریانس‌ها، باید ویژه مقدارها و ویژه بردارهای این ماتریس را محاسبه کرد. ویژه‌بردارها، امتداد محورهای بیضوی و ویژه مقدارها، طول نسبی محورها را مشخص می‌کند.

نتایج حاصل از این روش در حالتی که نمونه‌برداری در یک شبکه‌ی منظم صورت گرفته باشد، بهینه می‌شود. اگر توزیع داده‌ها ناهمگن باشد، ممکن است نتایج حاصل، تحت تأثیر این ناهمگنی قرار گیرد. از مشکلات این روش این است که در مورد نقاطی که به فاصله‌ی زیاد از یک‌دیگر قرار دارند امکان دارد مقدار کوواریانس منفی شود. وجود مقادیر منفی در بین داده‌های مثبت در محاسبه‌ی مجموع‌ها، به سبب تقلیل مقادیر مثبت، نوعی خطای سیستماتیک در محاسبات وارد می‌کند. در این حالت بهتر است مقادیر منفی کوواریانس را کنار گذاشت و فقط با مقادیر مثبت آن ماتریس را تشکیل داد.

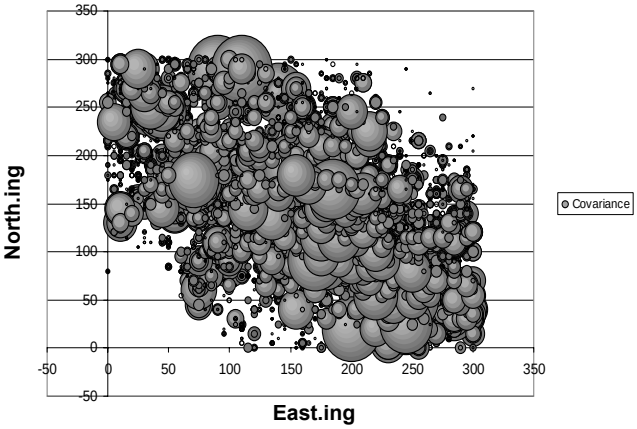
## ۴- مطالعه‌ی موردی تعیین شکل ناهمسانگردی در منطقه‌ی اکتشافی خشومی

به عنوان یک مثال کاربردی، به بررسی و تحلیل روش مذکور برای تعیین شکل ناهمسانگردی عیار اورانیم در کانسار اورانیم منطقه‌ی اکتشافی خشومی در ایران مرکزی پرداخته شد. سنگ میزبان این کانسار، از نوع بیوتیت گنایس می‌باشد بدین صورت که کانی‌های ثانویه‌ی اورانیم، به صورت پرشدگی در شکستگی‌های حاصل از یک زون برشی، که دارای امتداد شمال‌غرب- جنوب‌شرق می‌باشد، نهشته شده و تشکیل یک زون پرتوزا را داده‌اند [۴]. داده‌های خام قابل دسترس در این مرحله، داده‌های به صورت رقمی درآمده‌ی نمودارهای گامای کل در عملیات چاه‌پیمایی گمانه‌ها است. گمانه‌ها در شبکه‌های ۲۰×۲۰ و به عمق ۱۰۰ تا ۱۶۰ متر حفاری و برداشت شده‌اند. برای حذف تغییرات جزیی، کلیه‌ی داده‌های چاه‌پیمایی ابتدا به صورت رقمی و سپس به شکل آمیزه‌های ۰٫۵، ۱ و ۲ متری درآمدند. در ادامه مطابق آن‌چه که گفته شد، کلیه‌ی مراحل تشکیل ابرهای کوواریانس و محاسبه‌ی ماتریس مربوطه و ویژه مقدارها و ویژه بردارها برای هر سه دسته داده، انجام پذیرفته است.

### ۴-۱ محاسبات بر اساس آمیزه‌های ۰٫۵، ۱ و ۲ متری داده‌های گاما و تحلیل حساسیت

محاسبات مربوط به ابرهای کوواریانس بر اساس داده‌های ترکیب شده‌ی گاما در فواصل ۰٫۵ متری انجام پذیرفت و طی آن مجموعاً ۲۲۲۳۹ نقطه در فضای تخمین، در طول حفاری گمانه‌ها تشکیل شد. برای تشکیل ابرهای کوواریانس متغیر گاما، برای تمام زوج نمونه‌های به فاصله‌ی h از هم، و در امتداد و شیب‌های مختلف، مقدار کوواریانس محاسبه شد. این کار با نرم‌افزار Gslib صورت گرفت. در شکل ۴ ابرهای کوواریانس حاصل نمایش داده شده‌اند. ابرهای کوواریانس شکل ۴ یک کشیدگی را در جهت محور اصلی ناهمسانگردی نشان می‌دهند. برای محاسبه‌ی نسبت‌های ناهمسانگردی و جهت دقیق آن، ماتریس مجموع کوواریانس‌ها به شکل زیر به دست می‌آید

$$\begin{bmatrix} ۲٫۵۲۴E+۱۴ & ۱٫۵۸۶E+۱۴ & ۱٫۹۸۶E+۱۴ \\ ۱٫۶۸۶E+۱۴ & ۲٫۵۴۴E-۱۴ & ۲٫۰۲۰E+۱۴ \\ ۱٫۹۸۶E+۱۴ & ۲٫۰۲۰E+۱۴ & ۲٫۳۳۶E+۱۴ \end{bmatrix} \quad (۴)$$




**شکل ۴**- تشکیل ابرهای کوواریانس داده‌ها در آمیزه‌های با فواصل ۰٫۵ متری در بلوک ۱ آنومالی شماره ۶ منطقه‌ی اکتشافی خشومی (در فضای داخل کانسار).

با استفاده از نرم‌افزارهای ریاضی، ویژه مقدارها و ویژه بردارهای مربوط به این ماتریس محاسبه شد

$\lambda_۱$=۶٫۲۶۴۶۲E+۱۴ و Vector۱ =۰٫۵۷۰۶، ۰٫۵۷۶۲، ۰٫۵۸۵۸

$\lambda_۲$=۸٫۴۸۱۹۷E+۱۳ و Vector۲ =۰٫۷۱۸۴، -۰٫۶۹۵۳، -۰٫۰۱۵۸۹

$\lambda_۳$=۲٫۹۱۱۸۷E+۱۳ و Vector۳ =-۰٫۳۹۷۶، -۰٫۴۲۹۴، ۰٫۸۱۰۸

(۵)

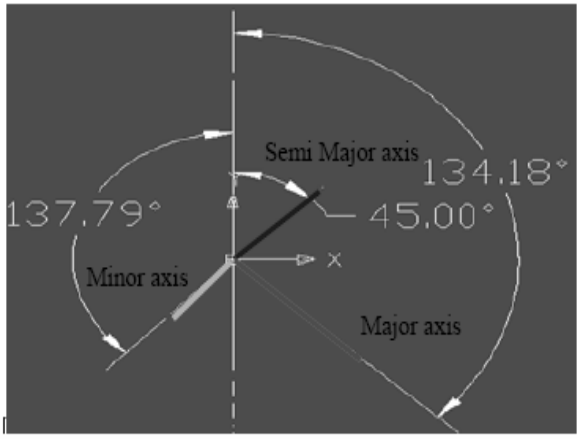
که در آن، $\lambda_۱$، $\lambda_۲$ و $\lambda_۳$، به ترتیب، ویژه مقدارهای اصلی، میانه و کمینه و Vector۱، Vector۲ و Vector۳ ویژه بردارها هستند. نتایج محاسبه‌ی نسبت‌های ناهمسانگردی برای یکسان‌سازی در فواصل ۱ و ۲ متری در جدول ۱ آورده شده است.

برای تعیین زوایه‌ی دقیق محورهای سه‌گانه‌ی ناهمسانگردی، در محیط بسته نرم‌افزار AutoCAD، ویژه بردارهای حاصل از ماتریس رسم و زوایای آن محاسبه شد (شکل ۵).

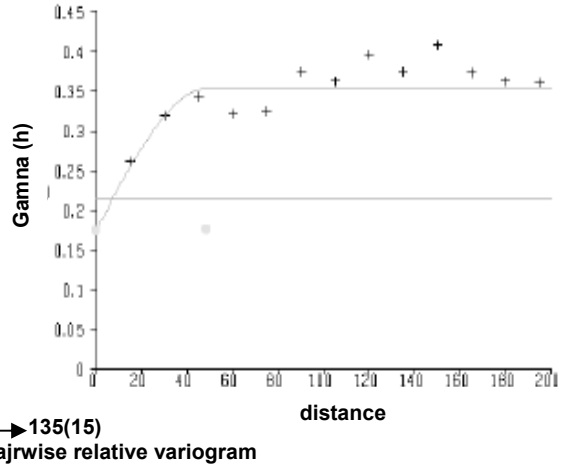
با توجه به جدول ۱، می‌توان نتیجه گرفت که نسبت‌های ناهمسانگردی و جهات آن، با افزایش فاصله‌ی آمیزه‌ها تغییر محسوسی نمی‌کند. لذا می‌توان این پارامترها را به عنوان پارامترهای بیضوی ناهمسانگردی قابل قبول دانست.

**جدول ۱**- ویژه بردارها و نسبت آن‌ها در تعریف بیضوی ناهمسانگردی به ازای فواصل مختلف آمیزه‌سازی.

| Gamma Composite Length | Major Minor | Major Semi major | Major Axis vector | Semi Major Axis vector | Minor Axis Vector |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.5 m | 4.14 | 2.70 | 0.56, 0.57, 0.5 | 0.72, -.68, -.033 | -0.38, -0.44, 0.85 |
| 1 m | 4.63 | 2.72 | 0.57, 0.57, 0.58 | 0.7184, -.69, -.015 | -0.39, -0.42, 0.81 |
| 2 m | 5.64 | 2.31 | 0.64, 0.65, 0.39 | 0.714, -0.69, -0.01 | -0.26, -0.29, 0.91 |




**شکل ۵**- نحوه‌ی ترسیم و محاسبه‌ی زوایای محورهای اصلی بیضوی ناهمسانگردی.

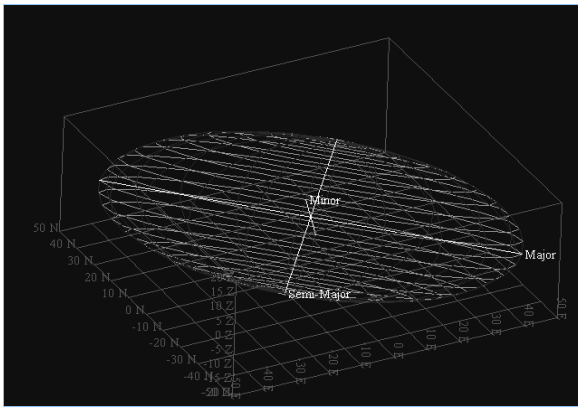



**شکل ۶**- منحنی تغییرنما در جهت محور اصلی بیضوی ناهمسانگردی در بلوک ۱ آنومالی شماره ۶ منطقه‌ی خشومی.

### ۴-۲ محاسبه‌ی مقادیر واقعی جهات اصلی بیضوی ناهمسانگردی

اگرچه نسبت‌های ناهمسانگردی با استفاده از روش ابرهای کوواریانس به دست می‌آید ولی برای تعیین اندازه‌ی واقعی محورها، باید در جهت محور اصلی بیضوی ناهمسانگردی، تغییرنمای داده‌های ترکیب شده‌ی گاما در فواصل مختلف را رسم کرد تا اندازه‌ی محور اصلی به دست آید. در شکل ۶ منحنی تغییرنما در جهت مربوط به محور اصلی بیضوی ناهمسانگردی رسم شده است که می‌توان از طریق برازش با مدل مناسب، و انجام آزمون‌های اعتبارسنجی، مقدار شعاع تأثیر را در این جهت به دست آورد و با اعمال نسبت‌های ناهمسانگردی، اندازه‌ی دیگر محورهای بیضوی ناهمسانگردی را تعیین کرد (شکل ۷).

شکل نهایی و پارامترهای محاسبه شده در نهایت، به ما کمک می‌کند تا تخمین سه‌بعدی و دوبعدی و حتی ترسیم نقشه‌های هم‌میزان پارامترهای اکتشافی، تعداد و محدوده‌ی داده‌های مورد استفاده جهت تخمین مشخص شده، و ارزیابی مناسب و واقعی بر اساس شکل کشیدگی عیار کانسار صورت پذیرد.




**شکل ۷**- شکل نهایی بیضوی ناهمسانگردی در بلوک ۱ آنومالی شماره ۶ منطقه‌ی خشومی.

## ۵- نتیجه‌گیری

با توجه به این‌که محاسبه‌ی بیضوی ناهمسانگردی برای کلیه‌ی برآوردهای سه‌بعدی ذخیره، امری ضروری به نظر می‌رسد، و به عنوان یک پیش‌نیاز اصلی در تخمین‌های زمین‌آماری به شمار می‌رود، تعیین و محاسبه‌ی دقیق این بیضوی اجتناب‌ناپذیر است. تعیین این بیضوی بر پایه‌ی تشکیل تغییر نماهای مختلف در

امتدادها و شیب‌های مختلف و یا بر اساس تشکیل رویه‌های تغییرنما برای صفحات مختلف داخل کانسار روشی زمان‌بر و نامطمئن است. در مقابل روش تحلیلی ابرهای کوواریانس، روشی سریع و در عین حال نسبتاً دقیق به نظر می‌رسد. هم‌چنین با توجه به تحلیل حساسیتی که در مورد فواصل آمیزه‌های لحاظ شده، صورت گرفت، می‌توان چنین نتیجه گرفت که این روش از پایایی قابل قبولی نسبت به فواصل مختلف ترکیب داده‌ها برخوردار است. با در نظر گرفتن همه‌ی جوانب امر، می‌توان چنین نتیجه‌گیری کرد که در صورت کافی بودن داده‌های عیار یا هر متغیر وابسته به آن در داخل کانسار، استفاده از روش ابرهای کوواریانس روش مناسبی است.

## پی‌نوشت‌ها:

۱- Anisotropy Ellipse

۲- Variogaram

۳- Krig

۴- Covariance Cloud

## References:


1. A.G. Journel, Ch.J. Huijbregts, "Mining Geostatitics, Academic Press Inc," (1990).

2. ع.ا. حسنی‌پاک، م. شرف‌الدین، "روش‌های تحلیلی پردازش،" انتشارات دانشگاه تهران (۱۳۶۸).

3. D.G. Krige, "The use of the Principal Component Technique to Define Anisotropy Details for Spatial Structures," AAMP, Colorado School og Mines, Colorad (1999).

4. ب. عمادی، ا. بسکابادی، م. قاسم‌پور، م. نجفی، "گزارش نیمه‌تفصیلی بلوک I منطقه اکتشافی خشومی،" دفتر اکتشاف و استخراج، شرکت تولید مواد اولیه سوخت هسته‌ای (زمستان ۱۳۸۴).