J. of Nucl Sci. and Tech.
71, 2015, 137-147

مجله‌ی علوم و فنون هسته‌ای
۷۱، ۱۳۹۴، ۱۴۷-۱۳۷

Sci. and Tech. note
یادداشت علمی و فنی

بررسی چگالی نوترون در حالت زیربحرانی با چشمه‌ی تپی نوترون

رسول خدابخش[۱]، سهراب بهنیا[۲]، مسعود صیدی*[۱]
۱. گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه ارومیه، صندوق پستی: ۵۷۱۵۳-۱۶۵، ارومیه ـ ایران
۲. گروه فیزیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، صندوق پستی: ۱۶۱۱۶-۴۱۴، ارومیه ـ ایران

چکیده: در طول راه‌اندازی خنک، رآکتور در حالت زیربحرانی است، لذا نمی‌توان از چشمه‌ی نوترون خارجی صرف‌نظر کرد. در این مقاله یک حل تحلیلی در حضور چشمه‌ی نوترون تپی با یک گروه نوترون تأخیری در طول راه‌اندازی یک رآکتور آب تحت فشار با سوخت ^{235}U ارایه شده است. حل تحلیلی براساس بسط چگالی نوترون در توان‌هایی از زمان تولید نوترون‌های آنی است. معادله‌های سینتیک نقطه‌ای با این روش برای واکنش‌پذیری‌های ثابت و خطی قابل حل است و به نتایج بهتری در مقایسه با کارهای تحلیلی دیگران می‌انجامند، ولی برای واکنش‌پذیری سینوسی، کارآمد نیست. بنابراین پاسخ چگالی نوترون به واکنش‌پذیری سینوسی به کمک بررسی نقاط ثابت و روش نمای لیاپانوف تحلیل شده است.

کلیدواژه‌ها:* *چشمه‌ی نوترون تپی، زمان تولید نوترون‌های آنی، نمای لیاپانوف، چگالی نوترون

Neutron density study in sub-critical state with pulsed neutron source

R. Khodabakhsh[1], S. Behnia[2], M. Seidi*[1]
1. Department of Physics, Science Faculty, Urmia University, P.O.Box: 165-57153, Urmia – Iran
2. Department of Physics, Urmia University of Technology, P.O.Box: 414-16116, Urmia – Iran

Abstract: During the cold start-up, the reactor is in sub-critical state. Therefore, the external neutron source cannot be neglected. In this research paper, the analytical solution of neutron point kinetics equations with a group of delayed neutrons in the presence of the pulsed neutron source in a pressurized-water reactor with ^{235}U as a fuel is presented. The analytical solution is based on the expansion of the neutron density in powers of the prompt neutrons generation time. The point kinetics equations with this method are solvable for step and ramp reactivity and lead to better results compared with other analytical works, but are not solvable for sinusoidal reactivity. So, the neutron density response to sinusoidal reactivity is analyzed by using the fixed point and Lyapunov exponents method.

Keywords: ***Pulsed neutron source, Prompt neutrons generation time, Lyapunov exponent, Neutron density***

*email: masoudseidi@yahoo.com
تاریخ دریافت مقاله: ۹۲/۱۲/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۳/۱۰/۱

۱. مقدمه

معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون[1] (NPK) مهم‌ترین معادله‌ها در دینامیک رآکتور هستند، آن‌ها را می‌توان از معادله‌ی پخش یا معادله‌ی ترابرد نوترون استخراج کرد [۱، ۲]. از طریق این معادله‌ها تعیین رفتار شار نوترون با یک واکنش‌پذیری[2] مشخص در طول زمان میسر است. چگالی شار نوترون و غلظت نیاهسته‌های نوترون‌های تأخیری مهم‌ترین پارامترها در مطالعه‌ی ایمنی و رفتارگذار رآکتور هسته‌ای هستند [۳]. در واقع این پارامترها، خروجی‌های معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون هستند. روش‌های عددی بسیاری برای حل این معادله‌ها وجود دارد که از بین آن‌ها می‌توان به روش سری توانی (PWS) [۴]، روش سری تیلور (TSM) [۵]، روش تحلیل وارون (AIM) [۶] و روش تحلیل نمایی تعمیم یافته (GAEM) [۷] اشاره کرد. از بین روش‌های تحلیلی مطالعه‌ی سینتیک زیربحرانی به کارهای سازیاشیلا [۸]، زانگ و همکاران [۹]، پالما و همکاران [۱۰] و لی و همکاران [۱۱] می‌توان اشاره کرد. لی و همکاران با در نظر گرفتن جمله‌ی چشمه و واکنش‌پذیری پله‌ای ورودی توانستند یک جواب تحلیلی به دست آورند. زانگ و همکاران [۹] یک جواب تحلیلی برای معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون با واکنش‌پذیری خطی ورودی و تقریب پرش آنی[3] (PJ) ارایه کردند. پالما و همکاران [۱۰] بدون استفاده از تقریب پرش آنی جواب‌هایی را به شکل تابع‌های گامای ناقص استخراج کردند. سازیاشیلا [۸] بدون استفاده از تقریب منبع ثابت به شکل تابع‌های گامای ناقص یک حل تحلیلی را برای واکنش‌پذیری خطی ارایه داد. روش تحلیلی اختلالی نیز در مورد معادله‌های یک گروهی با در نظر گرفتن اثرهای بازخور[4] دمایی روش کارآمدی است [۱۲، ۱۳]، این روش در این مقاله مورد بحث قرار گرفته است. البته این روش برای هر نوع واکنش‌پذیری قابل استفاده نیست، در این موارد می‌توان از روش‌های عددی مذکور و یا تحلیل پایداری مانند روش ماتریس ژاکوبین برای تحلیل نقاط ثابت [۱۴]، روش نمای لیاپانوف [۱۵، ۱۶] و روش انشعاب[5] [۱۷، ۱۸] بهره گرفت.

در این مطالعه تلاش شده ضمن ارایه‌ی مدل، به کمک روش اختلالی بسط چگالی نوترون در توان‌هایی از زمان تولید نوترون‌های آنی یک حل تحلیلی برای یک رآکتور PWR [۹، ۱۱] با واکنش‌پذیری‌های ثابت، خطی و سینوسی و با چشمه‌ی تپی ارایه شود. در مورد واکنش‌پذیری‌های ثابت و خطی، معادله‌های حاکم با روش مذکور قابل حل هستند و نتایج حاصل در مورد واکنش‌پذیری خطی، دقیق‌تر از روش پالما و همکاران است، اما با این روش و بدون استفاده از تقریب‌های مرسوم مانند پرش آنی و غیره نمی‌توان مسأله را حل کرد، چرا که با انتگرال‌هایی مواجه می‌شویم که فعلاً، تنها با روش‌های عددی و تقریبی قابل حل هستند. بر این اساس در این مورد سعی شده است یک حل عددی با استفاده از روش ODE۴۵ ارایه شود که دقت محاسبه‌های مربوط به آن بسیار بالا و با روش‌های عددی دیگر مانند TSM، GAEM و Pade هم‌خوانی زیادی دارد، به علاوه با استفاده از روش ماتریس ژاکوبین رفتار چگالی نوترون در نزدیکی نقاط ثابت بررسی شده و برای درک بهتر تأثیر تغییرهای پارامترهای کنترلی بر روی رفتار چگالی نوترون از روش نمای لیاپانوف بهره گرفته شده است. در پایان به بحث و نتیجه‌گیری روی موارد فوق پرداخته شده است.

۲. مدل‌سازی و حل تحلیلی

در طول راه‌اندازی خنک، رآکتور در حالت زیربحرانی است. در این مورد میانگین دمای قلب رآکتور به حدی پایین است که می‌توان به راحتی از اثرهای دمای بازخور صرف‌نظر کرد. مطابق این نظر، فرمول‌بندی ریاضی بر مبنای معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون به صورت زیر است [۹، ۱۰]

$$\begin{aligned}\frac{dn(t)}{dt} &= \frac{\rho(t)-\beta}{l}n(t)+\lambda c(t)+q(t)\\ \frac{dc(t)}{dt} &= \frac{\beta}{l}n(t)-\lambda c(t)\end{aligned} \qquad (۱)$$

که در آن، $n(t)$ چگالی نوترون، $c(t)$ چگالی متوسط نیاهسته‌های نوترون‌های تأخیری، ρ واکنش‌پذیری، λ ثابت واپاشی متوسط نیاهسته‌های نوترون‌های تأخیری، l متوسط زمان تولید نوترون‌های آنی، β کسر کل نوترون‌های تأخیری و $q(t)$ شدت چشمه‌ی نوترون خارجی است. با حذف وابستگی غلظت نیاهسته‌های نوترون تأخیری، سیستم معادله‌های دیفرانسیل حاکم که رفتار تقریبی چگالی نوترون برای تغییر در واکنش‌پذیری را با معادله‌ی ۱ توصیف می‌کند، این است

$$l\frac{d^{۲}n(t)}{dt^{۲}} = (\rho-\beta-\lambda l)\frac{dn(t)}{dn}+\left(\lambda\rho+\frac{d\rho}{dt}\right)n(t)+\left(\lambda q+\frac{dq}{dt}\right)l \qquad (۲)$$

در این مطالعه، منظور از چشمه‌ی تپی یک چشمه‌ی خارجی نوترون است که در مدت کوتاهی مقدار ثابتی نوترون را به داخل قلب رآکتور می‌فرستد و سپس شدت آن به صفر می‌رسید و چند لحظه‌ی دیگر تپی با همان شدت و در همان بازه‌ی زمانی می‌فرستد و مجدداً صفر می‌شود. این فرایند طی یک بازه‌ی زمانی صورت می‌گیرد که می‌توان آن را با یک تابع موج مستطیلی نشان داد. بنابراین معادله‌ی آن در یک دوره‌ی تناوب (T ثانیه) (مدت زمانی است که موج به حالت اول خودش بر می‌گردد) این است

$$q(t)=\begin{cases} q_0 & 0<t<\varepsilon \\ 0 & \varepsilon<t<T \end{cases},\quad \varepsilon, T\in R^+ \tag{۳}$$

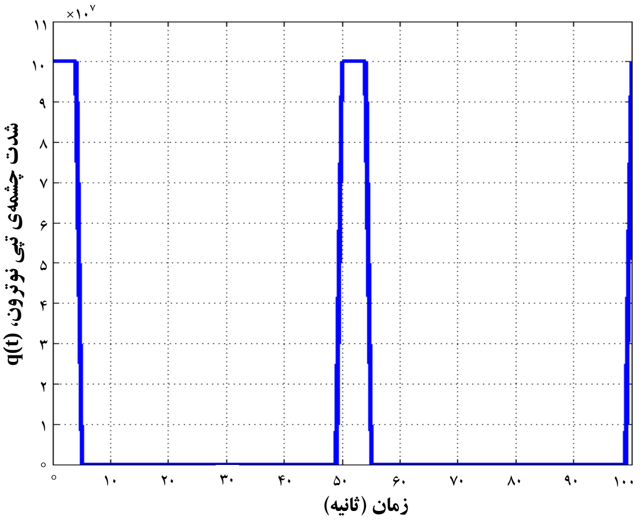
شکل ۱، رسمی از $q(t)$ به صورت تابعی از زمان به ازای $q_0=10^8$ (neutron $cm^{-3}\,s^{-1}$)، $T=50\,s$ و $\varepsilon=5s$ است.

معادله‌ی ۳ نمایش ریاضی یک تپ خیلی کوتاه نوترون‌های تزریق شده به درون رآکتور به وسیله‌ی یک مولد تپی نوترون در مدت زمان ε ثانیه است. بدین ترتیب، معادله‌ی سینتیک نقطه‌ای رآکتور با چشمه‌ی تپی نوترون و بدون اعمال تقریب پرش آنی برای یک گروه نیاهسته‌ی نوترون تأخیری این است

$$l\frac{d^2n(t)}{dt^2}=(\rho-\beta-\lambda l)\frac{dn(t)}{dn}+\left(\lambda\rho+\frac{d\rho}{dt}\right)n(t)+\lambda l\begin{cases} q_0 & 0<t<\varepsilon \\ 0 & \varepsilon<t<T \end{cases},\quad \varepsilon, T\in R^+ \tag{۴}$$

معادله‌ی ۴ به ازای واکنش‌پذیری‌های ثابت، خطی و سینوسی یک معادله‌ی دیفرانسیل خطی مرتبه‌ی دوم است که به ازای واکنش‌پذیری‌های خطی و ثابت به صورت تحلیلی قابل حل است، ولی به ازای واکنش‌پذیری سینوسی به صورت تحلیلی قابل حل نیست. بنابراین باید به کمک روش‌های کمّی عددی یا روش‌های کیفی تحلیل پایداری، مسأله بررسی شود. با توجه به این‌که چگالی نوترون به تغییرهای جزیی در زمان تولید نوترون‌های آنی بسیار حساس است (ولی در مقابل به تغییرهای ثابت واپاشی زیاد حساس نیست)، می‌توان زمان تولید نوترون‌های آنی را به عنوان یک عامل اختلالی مد نظر قرار داد. بر این اساس، چگالی نوترون را در توان‌هایی از این پارامتر کوچک بسط داده و از جمله‌های مرتبه‌های بالاتر (دوم به بالا $(O(l^2)$) صرف‌نظر می‌کنیم. لذا این بسط چنین نوشته می‌شود

$$n(t)=\sum_{m=0}^{n} l^m n_{m+1}(t) \tag{۵}$$



شکل ۱. تغییرات شدت چشمه‌ی نوترون با زمان.

حل تحلیلی در این مطالعه بر مبنای بسط معادله‌ی ۵ بوده است. بنابراین با جاگذاری معادله‌ی ۵ در معادله‌ی ۴ و ساده‌سازی معادله‌های حاکم داریم

$$\begin{cases} l^0:(\rho-\beta)\dfrac{dn_1}{dt}+\left(\lambda\rho+\dfrac{d\rho}{dt}\right)n_1=0 \\ l^1:\dfrac{d^2n_1}{dt^2}+\lambda\dfrac{dn_1}{dt}+(\beta-\rho)\dfrac{dn_2}{dt}=\left(\lambda\rho+\dfrac{d\rho}{dt}\right)n_2+\left(\lambda\rho+\dfrac{dq}{dt}\right) \end{cases} \tag{۶}$$

پیش‌تر، نهلا [۱۲] با در نظر گرفتن دو جمله‌ی اول بسط معادله‌ی ۵، چگالی نوترون را با به حساب آوردن اثرهای دمای بازخور به طور تحلیلی محاسبه کرد. در سال ۲۰۱۲ همین مسأله توسط سعیدی‌نژاد و همیه [۱۳] به طور دقیق‌تری بررسی شد، در مدل آن‌ها علاوه بر بسط چگالی نوترون، از بسط واکنش‌پذیری بازخور دمایی در توان‌هایی از زمان تولید نوترون‌های آنی و با در نظر گرفتن دو جمله‌ی اول هر بسط بهره گرفته شد. در مطالعه‌ی حاضر از این روش برای بررسی چگالی نوترونی در حضور واکنش‌پذیری‌های ثابت، خطی و سینوسی استفاده شده است.

۱.۲ واکنش‌پذیری ثابت

معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون در حضور چشمه‌ی تپی و واکنش‌پذیری ثابت، بدون اعمال هیچ‌گونه تقریبی، دارای حل تحلیلی دقیق‌اند. معادله‌ی ۶، شکل کلی معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون با تقریب اعمال شده است. بنابراین معادله‌ی ۶

تحت اثر واکنش‌پذیری الحاقی ثابت $\rho=\rho_0$ در بازه‌ی زمانی $0<t<\varepsilon$ چنین است

$$\begin{cases} l^0: (\rho_0-\beta)\dfrac{dn_1}{dt}+(\lambda\rho_0)n_1=0 \\ l^1: \dfrac{d^2n_1}{dt^2}+\lambda\dfrac{dn_1}{dt}+(\beta-\rho_0)\dfrac{dn_2}{dt}=(\lambda\rho_0)n_2+\lambda q_0 \end{cases} \tag{۷}$$

به راحتی می‌توان به کمک شرایط اولیه‌ی $n_1(t=0)=n_0$ و $n_2(t=0)=0$ جواب تحلیلی معادله‌ی ۷ در بازه‌ی زمانی $0<t<\varepsilon$ را به دست آورد

$$n(t)=\exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{(\beta-\rho_0)}t\right)\left\{n_0+\frac{q_0 l}{\rho_0}\left(1-\exp\left(-\frac{\lambda\rho_0}{(\beta-\rho_0)}t\right)\right)-\frac{n_0 l\rho_0\beta\lambda^2}{(\rho_0-\beta)^3}\right\}t \tag{۸}$$

بعد از ε ثانیه شدت چشمه به صفر می‌رسد؛ بنابراین، معادله‌ی ۷ چنین می‌شود

$$\begin{cases} l^0: (\rho_0-\beta)\dfrac{dn'_1}{dt}+(\lambda\rho_0)n'_1=0 \\ l^1: \dfrac{d^2n'_1}{dt^2}+\lambda\dfrac{dn'_1}{dt}+(\beta-\rho_0)\dfrac{dn'_2}{dt}=(\lambda\rho_0)n'_2 \end{cases} \tag{۹}$$

در بازه‌ی زمانی $\varepsilon<t<T$، معادله‌ی ۹ به کمک شرط پیوستگی $(n_{1,2}(t=\varepsilon)=n'_{1,2}(t=\varepsilon))$ به آسانی حل می‌شود؛ بنابراین داریم

$$n'(t)=\exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{(\beta-\rho_0)}t\right)\left\{n_0+\frac{q_0 l}{\rho_0}\left(1-\exp\left(-\frac{\lambda\rho_0\varepsilon}{(\beta-\rho_0)}\right)\right)-\frac{\lambda^2 n_0\beta l\rho_0}{(\beta-\rho_0)^3}\right\}t \tag{۱۰}$$

به طور کلی معادله‌های ۸ و ۱۰ جواب‌های تحلیلی معادله‌های تک گروهی در حضور واکنش‌پذیری ثابت و چشمه‌ی تپی‌اند.

۲.۲ واکنش‌پذیری خطی

واکنش‌پذیری خطی (تدریجی) اعمال شده به سیستم به صورت $\rho=\rho_0+rt$ بیان می‌شود [۹، ۱۰] که در آن r، آهنگ واکنش‌پذیری تدریجی تزریق شده به سیستم است. مانند حالت قبلی در بازه‌ی زمانی $0<t<\varepsilon$ معادله‌های حاکم عبارت‌اند از

$$\begin{cases} l^0: (\rho_0+rt-\beta)\dfrac{dn_1}{dt}+(\lambda\rho_0+\lambda rt+r)n_1=0 \\ l^1: \dfrac{d^2n_1}{dt^2}+\lambda\dfrac{dn_1}{dt}+(\beta-\rho_0-rt)\dfrac{dn_2}{dt}=(\lambda\rho_0+\lambda rt+r)n_2+\lambda q_0 \end{cases} \tag{۱۱}$$

به کمک روش ضریب انتگرال‌گیری و شرایط اولیه‌ی $n_1(t=0)=n_0$ و $n_2(t=0)=0$ در بازه‌ی زمانی مذکور جواب کلی معادله‌ی ۱۱ این است

$$\begin{aligned} n(t)=&\frac{e^{-\lambda(t-k_2)}}{(t-k_2)^{\eta+1}}\left\{A+\frac{lq_0}{(-\lambda)^{\eta}}\left[\gamma(\eta+1,-\lambda(t-k_2))-\gamma(\eta+1,\lambda k_2)\right]\right\} \\ &+\frac{e^{-\lambda(t-k_2)}}{(t-k_2)^{\eta+1}}\left(\frac{Al(\eta+1)}{r}\right)\left\{\frac{(\eta+1)}{2}\left(\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{(t-k_2)^2}\right)+\lambda\left(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{t-k_2}\right)\right\} \end{aligned} \tag{۱۲}$$

که در آن،

$$k_1=\frac{\lambda\rho_0+b}{b}$$
$$k_2=\frac{\beta-\rho_0}{b}$$
$$\eta=k_1+\lambda k_2-1$$
$$A=\frac{n_0(-k_2)^{\eta+1}}{e^{\lambda k_2}} \tag{۱۳}$$

در مرحله‌ی بعد، شدت چشمه به صفر می‌رسد. در این حالت شکل کلی معادله‌های حاکم چنین خواهد بود

$$\begin{cases} l^0: (\rho_0+rt-\beta)\dfrac{dn'_1}{dt}+(\lambda\rho_0+\lambda rt+r)n'_1=0 \\ l^1: \dfrac{d^2n'_1}{dt^2}+\lambda\dfrac{dn'_1}{dt}+(\beta-\rho_0-rt)\dfrac{dn'_2}{dt}=(\lambda\rho_0+\lambda rt+r)n'_2 \end{cases} \tag{۱۴}$$

معادله‌ی ۱۴ مشابه معادله‌ی ۱۱ به کمک ضریب انتگرال‌گیری حل می‌شود. ثابت انتگرال‌گیری نیز به کمک شرط پیوستگی $(n_{1,2}(t=\varepsilon)=n'_{1,2}(t=\varepsilon))$ به دست می‌آید، بنابراین داریم

$$n'(t)=\frac{e^{-\lambda(t-k_2)}}{(t-k_2)^{\eta+1}}\left\{A+\frac{lq_0}{r(-\lambda)^{\eta}}\left[\gamma(\eta+1,-\lambda(\varepsilon-k_2))-\gamma(\eta+1,\lambda k_2)\right]\right\}$$
$$+\frac{e^{-\lambda(t-k_2)}}{(t-k_2)^{\eta+1}}\left(\frac{Al(\eta+1}{r}\right)\left\{\frac{(\eta+1)}{2}\left(\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{(t-k_2)^2}\right)+\lambda\left(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{t-k_2}\right)\right\}$$
(۱۵)

معادله‌های ۱۲ و ۱۵ جواب‌های تحلیلی معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون با یک گروه نوترون تأخیری در حضور واکنش‌پذیری خطی و چشمه‌ی تپی مستطیلی در یک دوره‌ی تناوب هستند. به کمک شرط پیوستگی و روش مذکور می‌توان تابع چگالی نوترون را در هر دوره‌ی تناوب دلخواه محاسبه کرد به شرط این‌که چگالی نوترون در یک مرحله‌ی قبل از آن مشخص شده باشد.

۳.۲ واکنش‌پذیری سینوسی

پاسخ چگالی نوترون به واکنش‌پذیری سینوسی، $\rho=\rho_0\sin(\omega t)$، در حضور چشمه‌ی تپی به کمک بسط چگالی نوترون در توان‌هایی از زمان تولید نوترون به کمک معادله‌های ۶ بررسی می‌شوند که به کمک روش‌های متداول به طور تحلیلی دقیق تا به امروز حل نشده باقی مانده‌اند. با استفاده از روش‌های عددی و یا روش‌های تحلیل پایداری می‌توان این مسأله را بررسی و تحلیل کرد. در این‌جا علاوه بر تحلیل نقاط ثابت، از روش نماهای لیاپانوف برای بررسی و تحلیل پایداری این مسأله کمک گرفته شده است. یک روش بسیار کارآمد برای پیدا کردن معادله‌ی مشخصه‌ی یک نقطه‌ی ثابت، روش ماتریس ژاکوبین است [۱۴]. عنصرهای ماتریس ژاکوبین برای یک سیستم دوبعدی از معادله‌ی زیر تبعیت می‌کنند

$$f_{ij}=\frac{\partial f_i}{\partial x_j},\quad i,j=1,2 \tag{۱۶}$$

اگر جمع عنصرهای روی قطر اصلی ماتریس ژاکوبین را با TrJ و دترمینان ماتریس را با Δ نشان دهیم، معادله‌ی مشخصه چنین می‌شود

$$\lambda^2-(TrJ)\lambda+\Delta=0 \tag{۱۷}$$

در این‌جا با بررسی ریشه‌های معادله‌ی مشخصه در نقطه‌های ثابت مطابق جدول ۱ [۱۴] می‌توان نوع نقطه‌ی ثابت را مشخص کرد. در معادله‌ی ۱ به کمک روش مذکور می‌توان TrJ و Δ را محاسبه کرد. بنابراین داریم

$$TrJ=\left(\frac{\rho_0\sin(\omega t)-\beta-\lambda l}{l}\right),\quad \Delta=-\left(\frac{\lambda\rho_0}{l}\right)\sin(\omega t),\quad \omega=\frac{2\pi}{\tau}$$
(۱۸)

که در آن، τ برحسب ثانیه، دوره‌ی تناوب واکنش‌پذیری سینوسی است.

۴.۲ روش نمای لیاپانوف

یکی از سودمندترین ابزارها برای تحلیل پایداری سیستم‌های خطی و غیرخطی روش نمای لیاپانوف است. روش نمای لیاپانوف علاوه بر بیان کمّی حساسیت سیستم به شرایط اولیه، مقیاسی از میزان تناوبی بودن سیستم را ارایه می‌کند [۱۹]. به طوری‌که نمای لیاپانوف منفی به معنای نزدیک شدن مسیرها در فضای فاز به نقطه‌ی ثابت است و نمای لیاپانوف صفر دلالت بر این دارد که مسیرها در موقعیت نسبی خودشان باقی می‌مانند و گذر زمان تأثیری بر آن‌ها ندارد، لذا آن‌ها روی یک جاذب پایدار قرار دارند. در نهایت نمای لیاپانوف مثبت حاکی از ناپایداری و آشوبناک بودن سیستم است.

در یک سیستم m بعدی با m نمای لیاپانوف، تنها یک نمای لیاپانوف مثبت کافی است که سیستم را ناپایدار یا به عبارت دیگر آشوبناک بسازد [۲۰، ۲۱]. نمای لیاپانوف را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد

دو نقطه از نزدیک‌ترین مسیرهای همسایه را در فضای فاز در زمان‌های $t_1=0$ و $t_2=t$ در نظر بگیرید که فاصله‌ی نقطه‌ها در iامین جهت به ترتیب $\|\delta x_i(0)\|$ و $\|\delta x_i(t)\|$ است. نمای لیاپانوف (Λ_i) به صورت متوسط آهنگ رشد از فاصله‌ی اولیه تعریف می‌شود [۱۹]

جدول ۱. نقاط ثابت در فضای حالت دوبعدی [۱۴]

	TrJ<0	TrJ>0
$\Delta>\frac{1}{4}(TrJ)^2$	مارپیچ گره	مارپیچ دافع
$0<\Delta<\frac{1}{4}(TrJ)^2$	گره	دافع
$\Delta<0$	نقطه‌ی زین	نقطه‌ی زین

$$\frac{\|\delta x_i(t)\|}{\|\delta x_i(0)\|}=\exp(\Lambda_i t),\quad (t\to\infty) \tag{۱۹}$$

یا

$$\Lambda_i=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\log_2\frac{\|\delta x_i(t)\|}{\|\delta x_i(0)\|} \tag{۲۰}$$

در این‌جا سه وضعیت پیش می‌آید:

- اگر $\Lambda_i>0$، آن‌گاه فاصله‌ی دو نقطه در فضای فاز با نگاشت‌های مکرر به صورت نمایی افزایش می‌یابد، یعنی سیستم به سمت آشوبناک شدن پیش می‌رود.
- اگر $\Lambda_i<0$، آن‌گاه نقطه‌ی ثابت رفتار پایداری را از خود نشان می‌دهد. یعنی، سیستم به حالت پایدار می‌رسد.
- اگر $\Lambda_i=0$، حالت، حاشیه‌ای(۶) است [۲۲].

به عبارت دیگر اگر حالت‌های اولیه نزدیک به هم باشند، حالت‌های نهایی بسیار متفاوت خواهند بود. گاهی اوقات این پدیده وابستگی به شرایط اولیه نامیده می‌شود. عمدتاً نمای لیاپانوف را می‌توان براساس یکی از دو طرح زیر بررسی کرد:

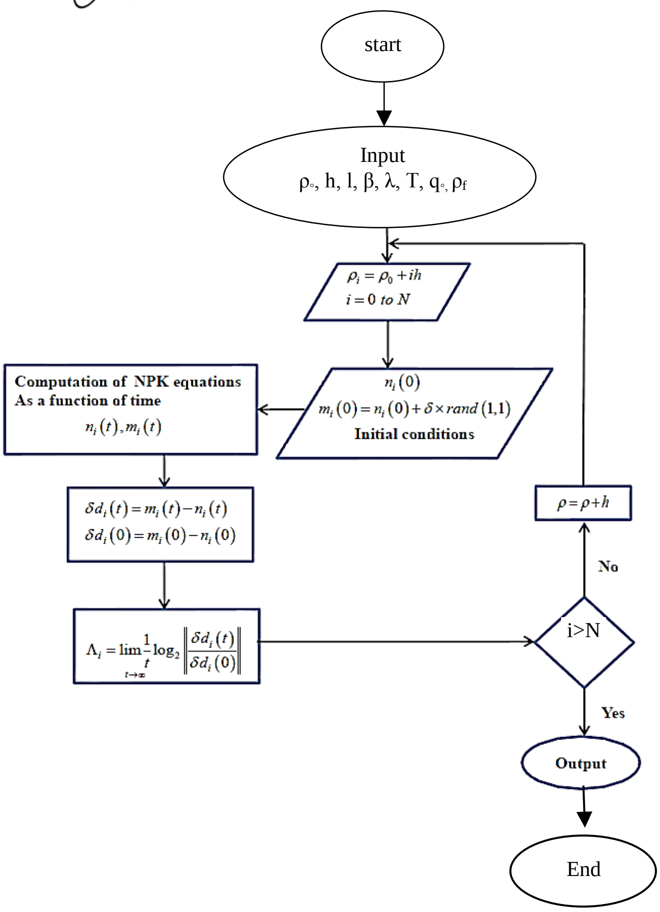
- براساس تحول زمانی نقاط همسایه در فضای حالت؛
- براساس تخمین ماتریس ژاکوبین موضعی [۲۳، ۲۴].

روش اول به روندنمای ولف [۲۵] معروف است و تخمینی از بزرگ‌ترین نمای لیاپانوف را ارایه می‌دهد؛ در شکل ۲ روندنمای محاسبه‌ی نمای لیاپانوف به کمک روش ولف رسم شده است. روش دوم قادر به تخمین همه‌ی نماهای لیاپانوف است. به کمک یکی از این طرح‌ها، به ازای یک پارامتر کنترلی دلخواه می‌توان نمای لیاپانوف را محاسبه کرد. بنابراین با تغییر جزیی در مقدار پارامتر کنترلی، نمای لیاپانوف جدید مجدداً محاسبه می‌شود. با ادامه‌ی این روش می‌توان توزیع طیفی نمای لیاپانوف مربوط به سیستم معادله‌های نقطه‌ای رآکتور را رسم کرد. لذا ما می‌توانیم به کمک این روش وضعیت پایداری سیستم را در یک محدوده‌ی دلخواه از تغییرهای پارامتر کنترلی تحلیل کنیم.

۳. نتایج و بحث

در این مطالعه رفتار چگالی نوترون در پاسخ به سه نوع واکنش‌پذیری ثابت، خطی و سینوسی در حضور یک چشمه‌ی تپی نوترون برای یک رآکتور PWR با سوخت ^{235}U و با ثابت‌های زیر بررسی شده است [۱۰، ۱۱]

$q_0=10^8$ neutron $cm^{-3}\,s^{-1}$، $l=0.0015$ s، $\beta=0.0075$، $\lambda=0.001\ s^{-1}$، $r=0.0001\ s^{-1}$، $\varepsilon=5$ s و $\rho_0=-0.006$.



شکل ۲. روندنمای محاسبه‌ی نمای لیاپانوف.

تمام محاسبه‌های انجام شده برای یک رآکتور زیربحرانی با شرایط تعادلی زیر آغاز می‌شود [۲۶]

$$n_0=-\frac{lq_0}{\rho_0},\quad c_0=-\frac{\beta q_0}{\rho_0\lambda} \tag{۲۱}$$

معادله‌های ۸ و ۱۰، جواب‌های معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون با واکنش‌پذیری ثابت هستند.

فرض اساسی در حل تحلیلی پالما و همکاران چشم‌پوشی از جمله‌ی $l\frac{d^2n}{dt^2}$ در معادله‌ی ۲ و در نظر گرفتن تقریب $\rho-\beta\gg\lambda l$ است. اگر تقریب‌های به کار رفته در کار پالما و همکاران [۱۰]، را بر معادله‌ی ۴ تحمیل کنیم نتایج حاصله هم‌خوانی بسیار خوبی با روش اختلالی پیشنهاد شده در این مطالعه دارند؛ اختلاف آن‌ها تنها در یک جمله‌ی بسیار کوچک بوده و برابر است با

$$\Delta n_{step}(t)=n_{proposed}-n_{palma}=-\frac{l\rho_0 n_0\beta\lambda^2}{(\beta-\rho_0)^3}\,t\exp\left(\frac{\lambda\rho_0}{\beta-\rho_0}t\right) \tag{۲۲}$$

در این‌جا تپی با شدت $q_0=10^8\ \mathrm{neutron\ cm^{-3}\ s^{-1}}$ به مدت ۵ ثانیه به سیستم اعمال و سپس مقدار آن به صفر کاهش یافته است. شکل ۳ میزان اختلاف چگالی نوترون در کار پالما و روش پیشنهاد شده برای تپ مذکور را نشان می‌دهد. با توجه به اختلاف بسیار کم، هر دو روش تحلیلی تقریبی، برای واکنش‌پذیری ثابت، به نتایج یکسانی می‌انجامند.

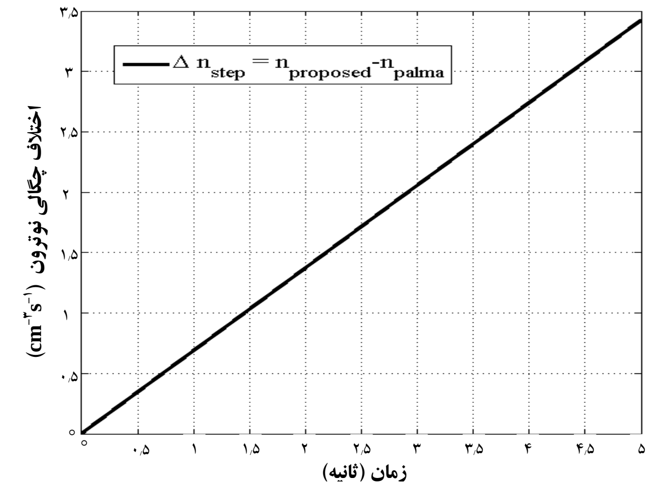
رابطه‌ی بین چگالی نوترون و واکنش‌پذیری خطی در مرحله‌ی راه‌اندازی رآکتور و در حضور چشمه‌ی ثابت، به وسیله‌ی پالما و همکاران [۱۰] بررسی شده است. این مسأله در مطالعه‌ی حاضر، بدون در نظر گرفتن جمله‌ی $l\frac{d^2n}{dt^2}$ و اعمال تقریب $\rho-\beta \gg \lambda l$ به صورت تحلیلی بررسی شده است (شکل ۴). اختلاف روش پیشنهاد شده و روش پالما برابر است با

$$\Delta n(t) = n_{proposed} - n_{palma} = \frac{e^{-\lambda(t-k_2)}}{(t-k_2)^{\eta+1}}\left(\frac{Al(\eta+1)}{r}\right)\left\{\frac{(\eta+1)}{2}\left(\frac{1}{k_2^2}-\frac{1}{(t-k_2)^2}\right)+\lambda\left(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{t-k_2}\right)\right\} \qquad (۲۳)$$

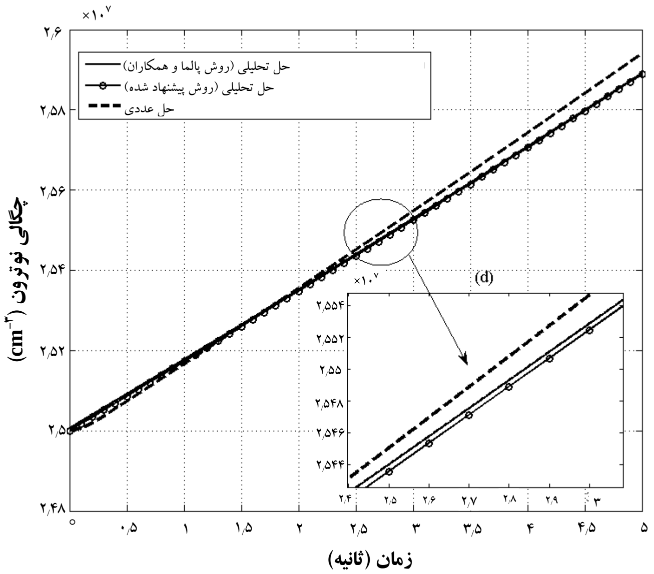
با توجه به شکل ۴ روش‌های تحلیلی با روش عددی هم‌سو هستند. اختلاف روش تحلیلی پیشنهاد شده با معادله‌ی پالما و همکاران [۱۰] به دلیل فرض به کار رفته در محاسبه‌ی حاضر است. با توجه به شکل ۵ در کوتاه مدت تقریب پالما درست است و نتایج حاصل از آن با روش پیشنهاد شده هم‌خوانی بسیار خوبی دارد، ولی در طولانی مدت تغییرها زیاد می‌شود.

در ارتباط با واکنش‌پذیری خطی، در نظر گرفتن تقریب‌های به کار رفته در کار پالما با گذشت زمان درصد اختلاف را افزایش می‌دهد و لذا برای این‌که نتیجه‌ی محاسبه به واقعیت نزدیک‌تر شود، باید تقریب‌های پالما را اعمال نکرد.

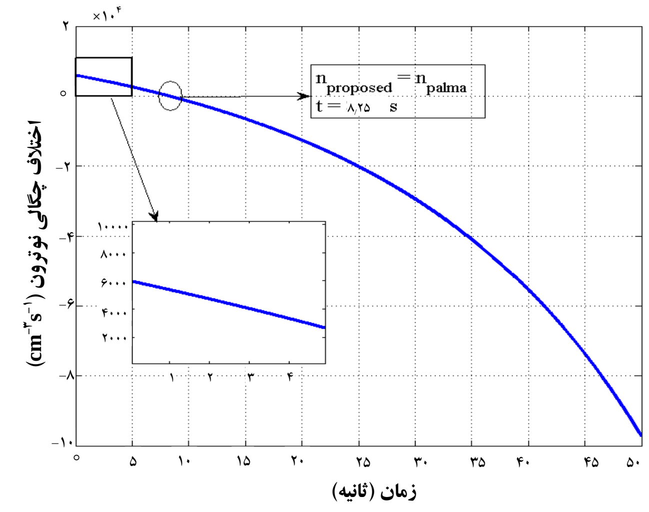
بنابراین تقریب به کار رفته در کار پالما و همکاران به نتایج درستی نمی‌انجامد و حل تحلیلی پیشنهاد شده نتایج بهتری را دربردارد. در این‌جا بیش‌ترین خطای نسبی جواب تحلیلی پالما نسبت به حل تحلیلی پیشنهاد شده در ۵ ثانیه‌ی اول کم‌تر از ۰٫۱ درصد است (شکل ۴)، و بیش‌ترین خطای نسبی روش تحلیلی پیشنهاد شده نسبت به حل عددی کم‌تر از یک درصد بود، لذا این بیان‌گر توافق خوب نتایج عددی و تحلیلی است.



شکل ۳. پاسخ رآکتور PWR به واکنش‌پذیری ثابت با چشمه‌ی تپی در یک دوره‌ی تناوب.



شکل ٤. پاسخ رآکتور PWR به واکنش‌پذیری خطی با چشمه‌ی تپی.

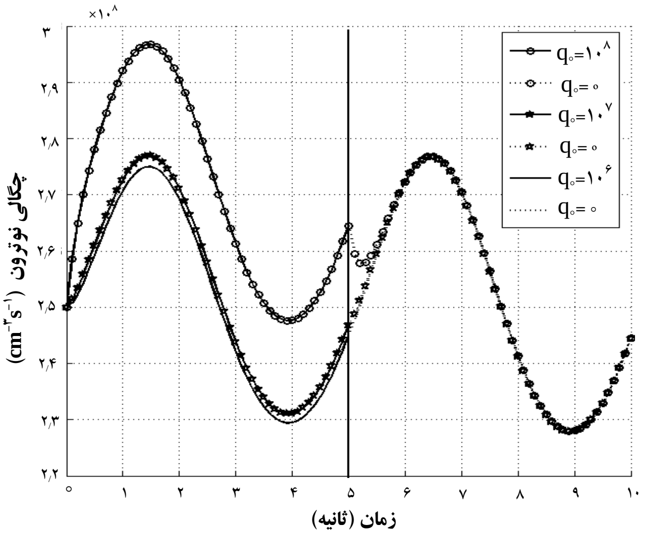


شکل ٥. اختلاف چگالی نوترون در کار پالما و روش پیشنهاد شده در واکنش‌پذیری خطی یک چشمه‌ی تپی.

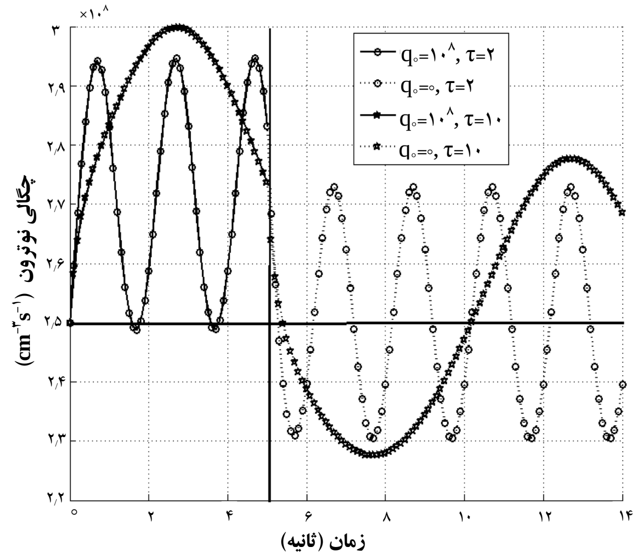
معادله‌های سینتیکی نقطه‌ای نوترون با یک گروه نوترون تأخیری در حضور واکنش‌پذیری سینوسی و چشمه‌ی تپی تنها به کمک تقریب پرش آنی حل تحلیلی دقیق دارند [۲۶]. استفاده از روش اختلال به صورت بسط چگالی نوترون نیز کارآمد نیست. بنابراین برای بررسی این مسأله به روش‌های عددی متوسل شدیم. در این‌جا حل عددی به کمک نرم‌افزار متلب و روش ODE۴۵ انجام شده است.

با توجه به شکل ۶، با کاهش شدت چشمه‌ی تپی دامنه‌ی نوسانات چگالی نوترون کاهش می‌یابد. به طوری که در مسأله‌ی حاضر عملاً حضور چشمه‌ی تپی با شدت $q_0 < 10^6$ (neutron cm^{-3} s^{-1}) تأثیر قابل توجهی در دامنه‌ی نوسانات چگالی نوترون ندارد. در یک دوره‌ی تناوب بعد از اعمال تپ به مدت ۵ ثانیه، شدت چشمه به صفر می‌رسد. بنابراین یک افت ناگهانی در چگالی نوترون ایجاد می‌شود (ناپیوستگی مشاهده شده در شکل ۶ حاکی از این مسأله است)؛ میزان افت چگالی نوترون بستگی به شدت چشمه دارد. با توجه به شکل ۶ در $q_0 < 10^6$ (neutron cm^{-3} s^{-1}) عملاً میزان افت ناگهانی چگالی نوترون به صفر می‌رسد و هیچ‌گونه ناپیوستگی در چگالی نوترون مشاهده نمی‌شود.

تغییرهای دوره‌ی تناوب واکنش‌پذیری سینوسی (τ) تأثیر مستقیمی بر روی دامنه‌ی نوسانات چگالی نوترون دارد. با افزایش دوره‌ی تناوب، دامنه‌ی نوسانات چگالی نوترون افزایش می‌یابد، چرا که با افزایش دوره‌ی تناوب مدت زمان بیش‌تری واکنش‌پذیری مثبت به سیستم تزریق می‌شود؛ شکل ۷ گویای این مطلب است. میزان افت چگالی نوترون در لحظه‌ای که شدت چشمه به صفر می‌رسد به ازای تمام مقدارهای دوره‌ی تناوب واکنش‌پذیری سینوسی به یک نسبت تغییر می‌کند. در دوره‌های تناوب کوچک در زمان قطع تپ عملاً هیچ‌گونه ناپیوستگی‌ای مبنی بر افت ناگهانی چگالی نوترون دیده نمی‌شود و منحنی‌ها طی دو مرحله در نقطه‌ی اتصال، هموار به نظر می‌رسند؛ این موضوع به خوبی در شکل ۷ مشاهده می‌شود.

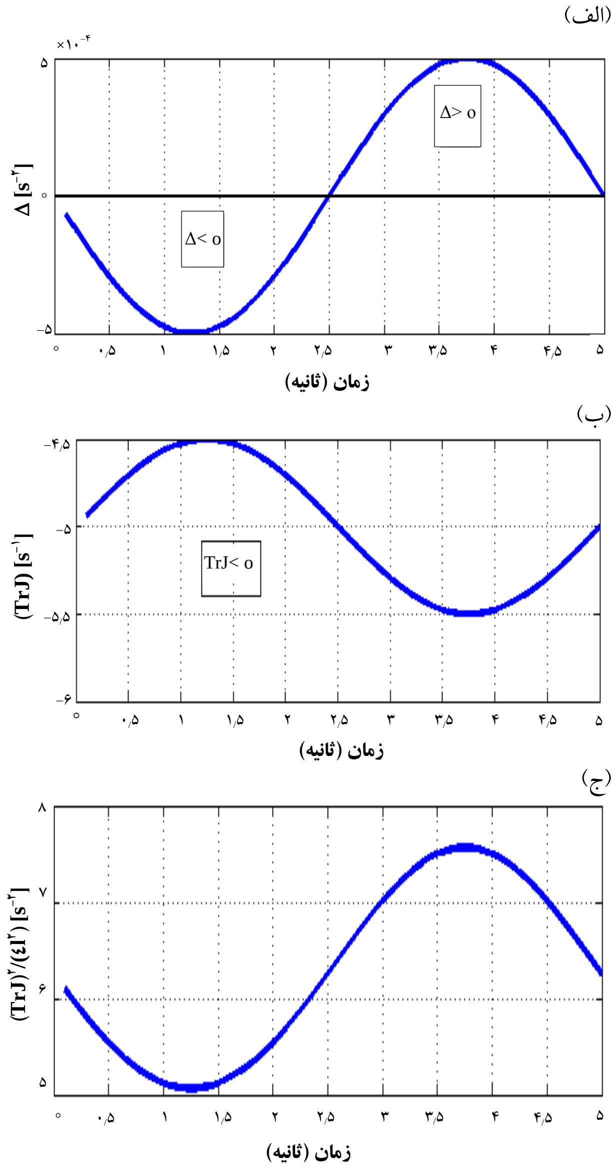


شکل ۶. چگالی نوترون در کار پالما و روش پیشنهاد شده در واکنش‌پذیری سینوسی با یک چشمه‌ی تپی.



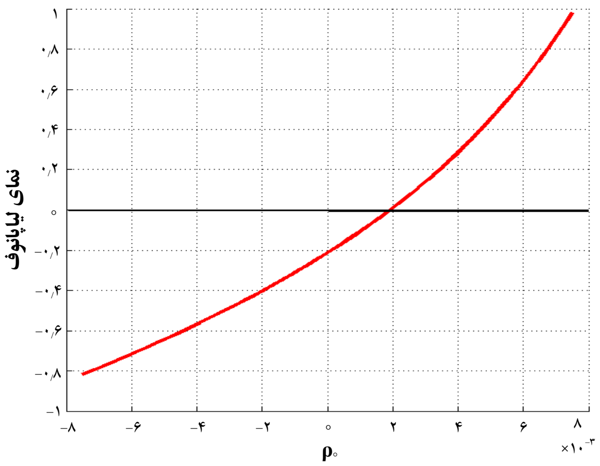
شکل ۷. رابطه بین چگالی نوترون و دوره‌ی تناوب واکنش‌پذیری سینوسی.

به منظور بررسی رفتار چگالی نوترون در پاسخ به واکنش‌پذیری سینوسی در حضور چشمه‌ی تپی رفتار جواب‌های معادله‌ی مشخصه در شکل ۸ مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به شکل ۸ در بازه‌ی زمانی $0 < t < 2.5$، $\Delta < \frac{1}{4}(TrJ)^2$ و $\Delta > 0$، بنابراین نقاط ثابت در بازه‌ی زمانی مذکور از نوع زینی[7] هستند. در بازه‌ی زمانی $2.5 < t < 5$، $\Delta < \frac{1}{4}(TrJ)^2$ و $\Delta > 0$، بنابراین نقاط ثابت در بازه‌ی زمانی مذکور به صورت گره[8] هستند. در این محدوده‌ی زمانی مسیرهای فضای فاز به نقاط ثابت نزدیک می‌شوند.



شکل ۸. رابطه‌ی بین دوره‌ی تناوب لحظه‌ای رآکتور گرمایی و زمان برای دوره‌های تناوب مختلف واکنش‌پذیری سینوسی.

روش نمای لیاپانوف این امکان را فراهم می‌آورد که بتوان تأثیر تغییرهای پارامترهای کنترلی در یک بازه‌ی خاص بر روی چگالی نوترون را بررسی کرد. این امر در بحث کنترل و امنیت رآکتور حایز اهمیت است. در این‌جا تأثیر تغییرهای دامنه‌ی واکنش‌پذیری سینوسی در بازه‌ی $-\beta \leq \rho_\circ \leq \beta$ بررسی شده است. با توجه به شکل ۹ نمای لیاپانوف روند صعودی دارد و به ازای $\rho_\circ \geq ۰{,}۰۰۱۹$، سیستم رفتار ناپایداری از خود نشان می‌دهد، به عبارتی دیگر مسیرهای فضای فاز به طور نمایی از هم دور می‌شوند و چگالی نوترون به طور نمایی افزایش می‌یابد.



شکل ۹. رابطه‌ی بین نمای لیاپانوف و دامنه‌ی واکنش‌پذیری سینوسی.

٤. نتیجه‌گیری

در این کار سعی شده است یک حل تحلیلی به کمک بسط چگالی نوترون در توان‌هایی از زمان تولید نوترون‌های آنی و برای یک گروه نوترون تأخیری در حضور یک چشمه‌ی خارجی تپی نوترون ارایه شود؛ هم‌چنین پاسخ چگالی نوترون در وقتی که واکنش‌پذیری‌های ثابت، خطی و سینوسی در زمان راه‌اندازی رآکتور اعمال می‌شود، بررسی شده است. معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون در حضور واکنش‌پذیری‌های ثابت و خطی با روش پیشنهاد شده دارای حل تحلیلی هستند. نتایج محاسبه‌ها برای واکنش‌پذیری ثابت با استفاده از تقریب‌های مدل پالما و روش پیشنهادی به نتایج یکسانی می‌انجامد ولی برای واکنش‌پذیری خطی اعمال تقریب‌های پالما اختلاف قابل توجهی در نتایج پالما و همکاران مخصوصاً با گذر زمان برای هر تپ دارد. برای واکنش‌پذیری سینوسی، معادله‌های سینتیک نقطه‌ای نوترون با روش پیشنهاد شده به طور تحلیلی قابل حل نیست. لذا به کمک بررسی نقاط ثابت و روش نمای لیاپانوف به طور کیفی این مسأله بررسی شد. به منظور اعتباربخشی به جواب‌های تحلیلی محاسبه‌های مربوط به واکنش‌پذیری خطی از روش عددی ODE45 کمک گرفته شده و نتایج حاصل از حل عددی با نتایج حاصل از حل تحلیلی مقایسه شدند. نتایج حاکی از تطابق بسیار خوب نتایج محاسبه‌های عددی و تحلیلی بود.

پی‌نوشت‌ها

1. Neutron point kinetics
2. Reactivity
3. Prompt Jump
4. Feedback
5. Bifurcation
6. Marginal
7. Saddle
8. Node

مرجع‌ها

[1] G.R. Keepin, Physics of reactor kinetics, Addison-Wesley Publishing Company, INC (1965).

[2] W.M. Stacey, Nuclear reactor physics, John Wiley and Sons, Inc., New York, United States of America, (2001).

[3] A.A. Nahla, Analytical solution to solve the point reactor kinetics equations, Nuclear Engineering and Design, 240 (2010) 1622-1629.

[4] A.E. Aboanber, Y.M. Hamada, Power series solution (PWS) of nuclear reactor dynamics with Newtonian temperature feedback, Annals of Nuclear Energy, 30 (2003a) 1111-1122.

[5] A.A. Nahla, Taylor's series method for solving the nonlinear point kinetics equations, Nuclear Engineering and Design, 241 (2011) 1592-1595.

[6] A.E. Aboanber, A.M. El Mhlawy, Solution of two-point kinetics equations for reflected reactors using Analytical Inversion Method (AIM), Progress in Nuclear Energy, 51 (2009) 155-162.

[7] A.A. Nahla, Generalization of the analytical exponential model to solve the point kinetics equations of Be- and D_2O-moderated reactors, Nuclear Engineering and Design, 238 (2008) 2648-2653.

[8] T. Sathiyasheela, Sub-critical reactor kinetics analysis using incomplete gamma functions and binomial expansions, Annals of Nuclear Energy, 37 (2010) 1248-1253.

[9] F. Zhang, W.Z. Chen, X.W. Gui, Analytic method study of point-reactor kinetic equation when cold start-up, Annals of Nuclear Energy 35 (2008) 746-749.

[10] D.A.P. Palma, A.S. Martinez, A.C. Gonçalves, Analytical solution of point kinetics equations for linear reactivity variation during the start-up of a nuclear reactor, Annals of Nuclear Energy, 36 (2009) 1469-1471.

[11] H. Li, W. Chen, L. Luo, Q. Zhu, A new integral method for solving the point reactor neutron kinetics equations, Annals of Nuclear Energy, 36 (2009) 427-432.

[12] A.A. Nahla, An analytical solution for the point reactor kinetics equations with one group of delayed neutrons and the adiabatic feedback model, Progress in Nuclear Energy, 51 (2009) 124-128.

[13] S.D. Hamieh, M. Saidinezhad, Analytical solution of the point reactor kinetics equations with temperature feedback, Annals of Nuclear Energy, 42 (2012) 148-152.

[14] R. Hilborn, Chaos and nonlinear dynamics, Oxford University Press, (2000).

[15] J.L. Munoz-Cobo, G. Verdu, C. Pereira, Dynamic reconstruction and Lyapunov exponents from time series data in boiling water reactors application to BWR stability analysis, Annals of Nuclear Energy, 19 (1992) 223-235.

[16] G.V. Durga Prased, M. Pandey, Stability analysis and nonlinear dynamics of natural circulation boiling water reactor, Nuclear Engineering and Design, 238 (2008) 229-240.

[17] C. Lange, D. Hennig, M. Schulze, A. Hurtado, Complex BWR dynamics from the bifurcation theory point of view, Annals of Nuclear Energy, 67 (2013) 91-108.

[18] C. Lange, D. Hennig, M. Schulze, A. Hurtado, Comments on the application of bifurcation analysis in BWR stability analysis, Progress in Nuclear Energy, 68 (2013) 1-15.

[19] E. Ott, Chaos in dynamical system, Cambridge University Press, Canada, (1993).

[20] J.R. Dorfman, An Introduction to Chaos in Nonequilibrium Statistical Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, (1999).

[21] S.T. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos, Perseus Books Publishing, L.L.C (1994).

[22] R. Della, E. Alhassan, N.A. Adoo, C.Y. Bansah, B.J.B. Nyarko, E.H.K. Akaho, Stability analysis of the Ghana Research Reactor-1 (GHARR-1), Energy Conversion and Management, 74 (2013) 587-593.

[23] H. Shibata, Fluctuation of mean Lyapunov exponent for turbulence, Physica A, 292 (2001) 175-181.

[24] H. Shibata, Physica A, Fluctuation of mean Lyapunov exponent for a coupled map lattice model, 284 (2000) 124-130.

[25] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, Physica D, 16 (1985) 285-317.

[26] D.L. Hetrick, Dynamics of nuclear reactors, American Nuclear Society, La Grange Park, (1993).